AMO, correction de l'examen de janvier 2012

Seconde partie

Exercice 1

1. Le filtre moyenneur est une convolution avec le noyau constant (d'une taille fixe t), il est donc linéaire.

   Il respecte la causalité puisque il est passe-bas.

   Il est unimodal (si on admet que l'unimodalité n'est pas strictement décroissant) mais c'est un cas limite.

   Il est normalisé.

   Il ne localise pas bien les contours car il lisse très fortement.

   Il est admissible puisque causal, unimodal et normalisé.

2. C'est un noyau d'espace d'échelle si on s'intéresse à la représentation du signal dérivé.

3. Partir de l'échelle 0, ou bien d'une échelle t_1 telle que le rapport t_2/t_1 est pair (t_2 est l'échelle que l'on souhaite calculé). Il faut aussi normalisé le noyau gaussien discret puisqu'il est tronqué.

4. Si $t = 0$ on retrouve le détecteur de Harris classique. Dans ce détecteur, σ représente la taille de la fenêtre de calcul des valeurs propres au voisinage d'un pixel. Si cette fenêtre est trop petite, on ne peut pas calculer l'une des valeurs propres du tenseur gradient image. Elle ne doit pas être trop grande si on peut bien localiser les coins. Typiquement $1 < \sigma < 3$

   Le paramètre τ est compris entre 0 et ... si l'on veut que le détecteur répondent fortement sur les coins (2 valeurs propres non nulles).

   Enfin, le paramètre t est un paramètre d'échelle pour le calcule des gradients.

Exercice 2

1. Il est explicite. Il est stable, il doit vérifier la condition $c\triangle t/\triangle x^2 < \frac{1}{2}$ où c est la vitesse de diffusion.

2. Il est implicite. Il est inconditionnellement stable.

3. Il s'agit d'une équation 1D d'advection:
$$u_t - u_x = 0$$

4. non corrigé

Exercice 3

1. La famille L^1 est construite par:

$$\begin{aligned} L^1(x, y, \lambda_0, t) &= G_t \star I_{\lambda_0}(x, y) \\ L^1(x, y, \lambda_0, 0) &= I_{\lambda_0}(x, y) \end{aligned}$$

   en notant $G_t(x, y)$ la gaussienne 2D de variance t et $I_{\lambda_0}(x, y) = I(x, y, \lambda_0)$.

   Donc L^1 est solution de l'équation 2D de la chaleur:

$$\begin{aligned} L_t(x, y, t) &= \frac{1}{2}(L_{xx}(x, y, t) + L_{yy}(x, y, t) \\ L(x, y, 0) &= I_{\lambda_0}(x, y) \end{aligned}$$

2. Si on fixe x et y, la fonction L^2 ne dépend plus que d'une variable λ (en plus de la variable d'échelle s). On la construit comme une convolution gaussienne 1D:

$$\begin{aligned} L^2(x_0, y_0, \lambda, s) &= g_s \star I_{x_0, y0}(\lambda) \\ L^2(x_0, y_0, \lambda, 0) &= I_{x_0, y_0}(\lambda) \end{aligned}$$

   en notant $g_s(\lambda)$ la gaussienne 2D de variance s et $I_{x_0,y_0}(\lambda) = I(x_0, y_0, \lambda)$.

   Et donc L^2 est solution de l'équation 1D de la chaleur:

$$\begin{aligned} L_t(\lambda, s) &= \frac{1}{2} L_{\lambda\lambda}(\lambda, s) \\ L(\lambda, 0) &= I_{x_0, y_0}(\lambda) \end{aligned}$$

3. La famille $(L(x, y, \lambda, t, s))_{s,t}$ est une représentation à l'échelle s de la famille $(L^1(x, y, \lambda, t))_t$. Chaque membre de cette famille est lui-même une représentation à l'échelle t d'un signal $I(x, y, \lambda)$. Le paramètre t est un paramètre d'échelle spatial et le paramètre s est un paramètre d'échelle spectral.

4. Puisqu'on dispose de 3 bandes spectrales, on utilise un noyau gaussien 1D discrétisé sur 3 états: $(g_s(-1), g_s(0), g_s(1))$. L s'écrit comme la convolution par le filtre précédent sur L^1:

$$L(x, y, l, t, s) = L^1(x, y, 1, t) * g_s(-1) + L^1(x, y, 0, t) * g_s(0) + L^1(x, y, -1$$