

TRAITEMENT DES IMAGES MÉDICALES

DÉTECTION, ESTIMATION ET ANALYSE DU MOUVEMENT

Dominique Béréziat

Université Pierre et Marie Curie
Laboratoire d'Informatique de Paris 6

Révision de novembre 2012
version sans animations

PLAN DU COURS

INTRODUCTION

ÉTAT DE L'ART

SPÉCIFICITÉS DE L'IMAGERIE MÉDICALE

APPLICATIONS

INTRODUCTION

Problématiques médicales

Problématiques images

Spécificités du médical

Définitions

ÉTAT DE L'ART

SPÉCIFICITÉS DE L'IMAGERIE MÉDICALE

APPLICATIONS

Introduction

Problématiques médicales

PROBLÉMATIQUES MÉDICALES

- ▶ Acquisitions 2D+t ou 3D+t (IRM, PET, SPECT, US, Angiographie, vidéo) : comment exploiter l'information temporelle ?
- ▶ L'information temporelle renseigne sur :
 - ▶ les modifications et changements des tissus dans les séquences d'images,
 - ▶ la cinématique des structures médicales.
- ▶ Problèmes médicaux :
 - ▶ évolution des pathologies (tumeurs, anévrismes, fractures, ...) : suivi et planification des traitements,
 - ▶ étude fine de la déformations des organes/tissus : myocarde, poumons (diagnostic),
 - ▶ étude des cycles temporels : le cœur (diagnostic),
 - ▶ mouvement du corps humain (rigide-articulé).

PROBLÉMATIQUES MÉDICALES (SUITE)

- ▶ Recalage des images :
 - ▶ recalage 2D/3D.
 - ▶ recalage non rigide pour les atlas.
- ▶ Reconstruction 3D/4D :
 - ▶ Visualisation de l'activité temporelle.
 - ▶ Inférer des volumes 3D à partir du champ de déplacement d'un autre volume.

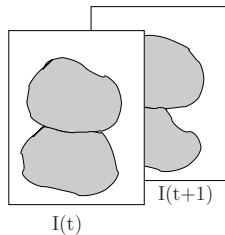
Introduction

Problématiques images

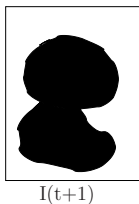
PROBLÉMATIQUES IMAGES

- ▶ Comment inférer un mouvement à partir d'un changement d'illumination d'un (groupe de) pixel ?
 - ▶ Détection du mouvement : qui bouge ?
 - ▶ Quantification du mouvement : quelle vitesse, quelle direction ?
- ▶ Comment relier le mouvement estimé dans les images au mouvement réel de la scène acquise ?
- ▶ Des difficultés liées à l'acquisition :
 - ▶ Changements de luminosité non induits par les structures mouvantes.
 - ▶ Occultations.
 - ▶ Objets déformables (mouvements non linéaire).
 - ▶ Effets de perspective.

PROBLÉMATIQUES IMAGES (SUITE)



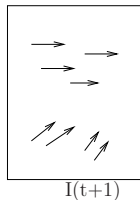
Détection



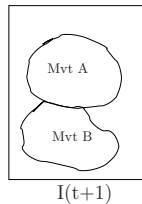
Segmentation



Estimation



Indexation



Introduction

Spécificités du médical

SPÉCIFICITÉS DU MÉDICAL : LES PROBLÈMES À RÉSOUDRE

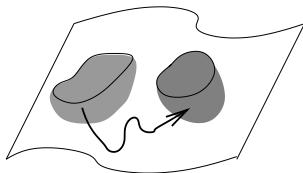
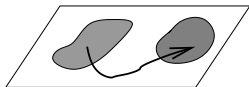
- ▶ L'estimation du mouvement est un problème mal posé (on le verra) : l'information n'est pas exhaustive.
- ▶ Exploiter les spécificités des modalités de l'imagerie médicales et des structures observées :
 - ▶ Modèle d'illumination des objets.
 - ▶ Des contraintes sur la nature des mouvements.
- ▶ Besoin d'estimer des vitesses de différentes magnitudes.

Introduction

Définitions

DÉFINITION DU MOUVEMENT

- ▶ Deux aspects très différents :
 1. le mouvement d'un objet dans une scène et l'impact dans les images,
 2. l'image et son évolution temporelle = "flot optique",



- ▶ Soit $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a : $\vec{\mathbf{v}} = (u, v, w) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t} \right)$
- ▶ $I(i, j, t) = f(x, y, z)$.
Impact à t' ($I(i, j, t')$) connaissant $\vec{\mathbf{v}}$?

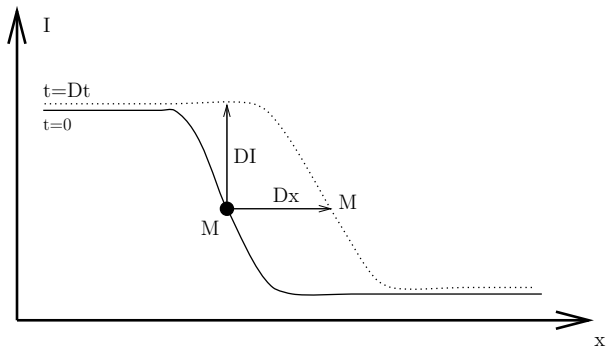
DÉFINITION DU MOUVEMENT (SUITE)

- ▶ Dans l'image, la définition du mouvement reste très subjective :
 - ▶ mouvement \leftrightarrow changement de brillance.
 - ▶ *évolution temporelle de caractéristiques visuelles*. Trouver une fonction de transition (une trajectoire) pour un point (une structure donnée).

$$\xi(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_t$$

- ▶ le déplacement d'un point induit un gradient spatio-temporel.
- ▶ Comment évolue la luminosité d'un point le long de sa trajectoire ?
 - ▶ En général, on ne le sait pas : besoin d'hypothèse !
 - ▶ Illumination constante.
 - ▶ Illumination non constante : un modèle.

DÉFINITION DU MOUVEMENT (SUITE)



INTRODUCTION

ÉTAT DE L'ART

Méthodes globales

- Différence d'images

- Approche fréquentielle

- Mise en correspondance de blocs

Méthodes locales

- Définition du flot optique

- Problème de l'ouverture

- Approche variationnelle

- Approche paramétrique

SPÉCIFICITÉS DE L'IMAGERIE MÉDICALE

APPLICATIONS

CLASSEMENT MÉTHODOLOGIQUE

1. Analyse de la variation des niveaux de gris (détection de changement, différence d'images)
2. Analyse locale de l'évolution des niveaux de gris (flot optique et ses variantes)
3. Analyse de l'évolution des formes (mise en correspondance, reconnaissance des formes, suivi).

État de l'art

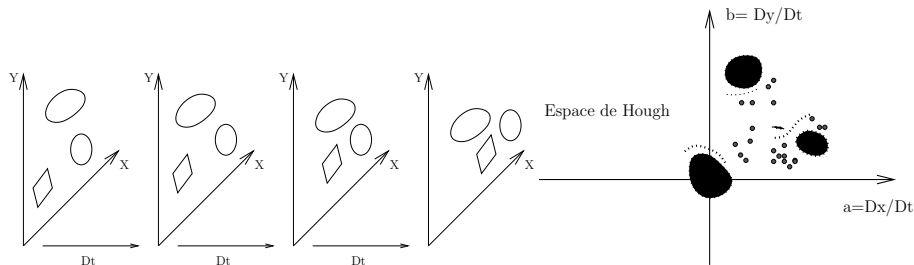
Méthodes globales

Méthodes globales

Différence d'images

DIFFÉRENCE D'IMAGES

- ▶ Historiquement : les premières méthodes.
- ▶ But : analyser les différences temporelles pixel à pixel entre deux plans.
- ▶ Hypothèse basique : les zones actives dans le temps correspondent à un mouvement : elles induisent une variation temporelle des niveaux de gris.



Méthodes globales

Approche fréquentielle

ANALYSE DANS L'ESPACE DE FOURIER

- ▶ Les mouvement affines globaux ont une trace facilement identifiable dans l'espace de Fourier.
- ▶ Exemple de la translation, on cherche \mathbf{v} constant tel que :

$$I_1(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = I_2(\mathbf{x})$$

- ▶ Il est facile de voir que :

$$\hat{I}_2 = \hat{I}_1 e^{2i\pi\mathbf{x}^T\mathbf{v}}$$

- ▶ On peut faire de même avec les rotations et les changements d'échelle (en utilisant une transformée de Melin).
- ▶ Voir le cours d'Antoine Manzanera.

Méthodes globales

Mise en correspondance de blocs

MISE EN CORRESPONDANCE DE BLOCS (*Bloc Matching*)

- ▶ Principe : identifier des blocs similaires dans une paire d'images.
- ▶ Chercher \mathbf{v} qui maximise :

$$C(\mathbf{v}, W) = \sum_{\mathbf{x} \in W} \text{sim}(I_1(\mathbf{x} + \mathbf{v}), I_2(\mathbf{x}))$$

- ▶ sim : critère de similarité (corrélation, différence moyennée, information mutuelle, ...).
- ▶ W bloc dans l'image.
- ▶ En pratique on réduit l'espace de recherche sur \mathbf{v} .

AVANTAGES/INCONVÉNIENTS

- ▶ Peut travailler à différentes échelles (pixel, voisinage, gros objet),
- ▶ Très efficace sur la poursuite d'objet rigide ou peu déformable (rarement le cas en médical).
- ▶ Facile à implémenter.
- ▶ Inadapté à fournir un champ dense de vitesse sur une image.
- ▶ Choix de la fenêtre W dépend de la taille des objets à suivre.
- ▶ Les calculs sont lourds !
- ▶ Réduire le coût en privilégiant des directions de mouvement (par analyse rétrograde).

RÉSULTAT SUR SÉQUENCE VIDÉO



FIGURE: Séquence Taxi 1

RÉSULTAT SUR SÉQUENCE VIDÉO



FIGURE: Séquence Taxi 2

État de l'art

Méthodes locales

Méthodes locales

Définition du flot optique

FLOT OPTIQUE : DÉFINITION

- ▶ Flot optique : déplacement des motifs de niveaux de gris dans les séquences d'images.
 - ▶ Flot optique \nrightarrow mouvement réel des structures.
 - ▶ Définition équivalente : mouvement apparent dans les images ; transport de la luminosité dans les images.
 - ▶ Un modèle (simple) d'évolution de la luminosité :
- \Rightarrow la luminosité est constante au cours du temps : contrainte du flot optique (surface lambertienne : réflexion spéculaire parfaite des surfaces).
- ▶ D'autres modèles sont possibles (particulièrement en médical).

CONTRAINTE DU FLOT OPTIQUE

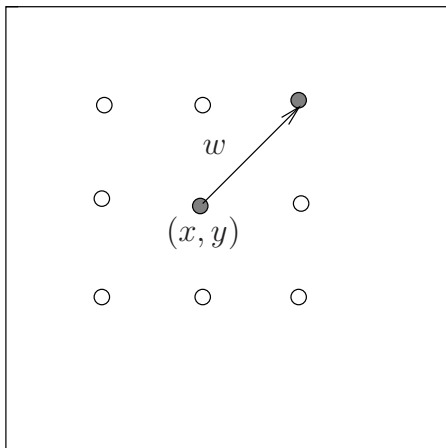


FIGURE: Transport de la luminosité.

MODÉLISATION

- ▶ Conservation de la luminosité :

$$I(x, y, t) = I(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t), \forall (x, y) \in \Omega \quad (1)$$

- ▶ En discret : c'est un problème non linéaire de mise en correspondance.
- ▶ En continu : c'est un problème de transport.
- ▶ Ω : domaine de l'image (région bornée de \mathbb{R}^2)
- ▶ $w = (\delta x, \delta y)$: déplacement du point (x, y) au temps t .
- ▶ Développement de Taylor au point (x, y) à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} I(x + \delta x, y + \delta y, t + \delta t) = & I(x, y, t) \\ & + \delta x \frac{\partial I}{\partial x}(x, y, t) \\ & + \delta y \frac{\partial I}{\partial y}(x, y, t) \\ & + \delta t \frac{\partial I}{\partial t}(x, y, t) \end{aligned}$$

MODÉLISATION (SUITE)

- ▶ On a :

$$\frac{I(x+u\delta t, y+v\delta t, t+\delta t) - I(x, y, t)}{\delta t} = I_x \frac{\delta x}{\delta t} + I_y \frac{\delta y}{\delta t} + I_t$$

- ▶ Passage à la limite : $\delta t \rightarrow 0$:

$$I_x \frac{\partial x}{\partial t} + I_y \frac{\partial y}{\partial t} + I_t = 0$$

- ▶ Contrainte du flot optique (OFC), $\mathbf{v} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t} \right)$:

$$\nabla I^T \mathbf{v} + I_t = 0 \quad (2)$$

- ▶ Autre façon de voir :

$$\begin{aligned} \frac{dl}{dt} &= 0 \quad (\text{invariance de la luminosité}) \\ \Leftrightarrow \frac{dl}{dt}(x(t), y(t), t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial l}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial l}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial l}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Méthodes locales

Problème de l'ouverture

UN PROBLÈME MAL POSÉ

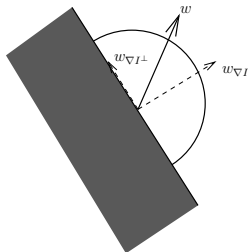
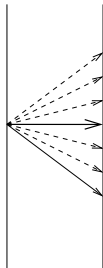
- ▶ Une équation, un vecteur de \mathbb{R}^2 : système sous-dimensionné.
- ▶ Un problème mal posé : **infinité de solutions**.
- ▶ Une solution parmi d'autres : calculons la projection de w dans la direction du gradient de I ...

$$\begin{aligned}
 w_{\nabla I} &= \left\langle \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}, w \right\rangle \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \\
 &= \frac{I_x u + I_y v}{\|\nabla I\|} \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \\
 &= \frac{-I_t}{\|\nabla I\|} \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}
 \end{aligned}$$

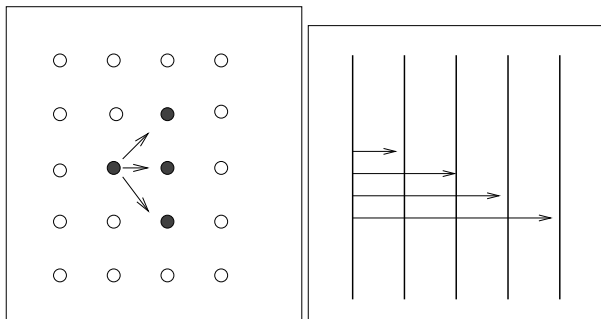
- ▶ La composante orthogonale s'appelle "indice de mouvement".
- ▶ Cette indétermination à calculer une solution unique est connue sous le nom de "problème de l'ouverture" (*Aperture problem*).

LE PROBLÈME DE L'OUVERTURE

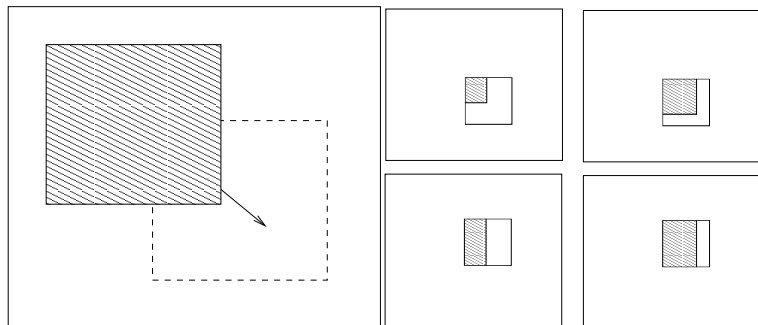
- ▶ Intuitivement : on manque d'information pour calculer le flot optique.



LE PROBLÈME DE L'OUVERTURE (SUITE)



LE PROBLÈME DE L'OUVERTURE (SUITE)



QUELLES CONTRAINTES SUPPLÉMENTAIRES ?

- ▶ La théorie : il manque une contrainte sur \mathbf{v} telle que le système sur \mathbf{v} soit résolvable (pas de dépendances linéaires).
- ▶ Première solution : équations multiples de flot optique :

$$\mathbf{v}^T \nabla I^i + I_t^i = 0, i \in \{1, 2, \dots\} \quad (3)$$

Les I^i sont différentes acquisitions d'une même scène :

- ▶ images de différentes modalités,
- ▶ images à différents points de vue (stéréovision),
- ▶ peuvent dériver d'une image par filtrage (ex : laplacien).

CONTRAINTES SUPPLÉMENTAIRES

- ▶ Quand on ne possède qu'une seule séquence mono-modale ?
- ▶ Utiliser des filtres pour créer de nouvelles images (exemple : laplacien)
- ▶ Cas $i = 1, 2$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le flot optique soit bien posé.
- ▶

CONTRAINTES SUPPLÉMENTAIRES

- ▶ Quand on ne possède qu'une seule séquence mono-modale ?
- ▶ Utiliser des filtres pour créer de nouvelles images (exemple : laplacien)
- ▶ Cas $i = 1, 2$. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que le flot optique soit bien posé.
- ▶ CNS pour inversion de l'OFC : le système (3)

$$\begin{cases} ul_x^1 + vl_y^1 + l_t^1 = 0 \\ ul_x^2 + vl_y^2 + l_t^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Aw = F$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} l_x^1 & l_y^1 \\ l_x^2 & l_y^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} -l_t^1 \\ -l_t^2 \end{pmatrix}$$

est inversible ssi $\det(A) \neq 0$ donc ssi $l_x^1 l_y^2 \neq l_x^2 l_y^1$.

- ▶ Pas de dépendance linéaire entre ∇I^1 et ∇I^2 .

DÉCOMPOSITION SUR BASES D'ONDELETTES

- ▶ Les ondelettes permettent une décomposition des structures image selon différentes échelles et une localisation spatiale.
- ▶ Fourier : analyse fréquentielle pure ; pas de localisation spatiale.
- ▶ Les ondelettes sont un compromis entre représentation spatiale et représentation fréquentielle (voir U.E. AMO).
- ▶ Décomposition de l'image sur une base orthogonale s'écrivant :

$$\begin{cases} \psi_{j\mathbf{k}}^s(\mathbf{x}) = 2^j \psi^s(2^j \mathbf{x} - \mathbf{k}) \\ (\psi^s)_{s=1, \dots, S} : \text{ensemble d'ondelettes mères.} \end{cases}$$

DÉCOMPOSITION SUR BASES D'ONDELETTES (SUITE)

- ▶ Base orthogonale : indépendance entre les projections.
- ▶ Le système :

$$\langle \nabla I, \psi_{jk}^s \rangle^T \mathbf{v} + \langle \frac{\partial I}{\partial t}, \psi_{jk}^s \rangle = 0, \forall s = 1, \dots, S$$

est donc libre.

- ▶ $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu(x)$: produit scalaire dans l'espace des fonctions intégrables.
- ▶ Voir thèse de Christophe Bernard [Bernard, 1999].

CONTRAINTES SUR LE CHAMP DES VITESSES

- ▶ Régularisation spatiale : contraindre l'espace fonctionnelle.
 - ⇒ borner les variations spatiales de \mathbf{v} .
- ▶ Imposer un modèle de mouvement : paramétrer la fonction \mathbf{v} .
 - ⇒ par exemple, un modèle de mouvement affine sur \mathbf{v} ou constant par morceaux.
- ▶ Ajouter d'autres contraintes physiques (si possible).

Méthodes locales

Approche variationnelle

APPROCHE VARIATIONNELLE

MÉTHODE DE HORN & SCHUNCK

- ▶ Premier modèle différentiel [Horn and Schunck, 1981].
- ▶ Méthodologie : problème d'optimisation numérique, résolu par une *formulation variationnelle*.
- ▶ Le modèle :
 - ▶ Invariance de la luminosité (Contrainte du flot optique).
 - ▶ Régularité du champs des vitesses : une contrainte sur la variation du champs des vitesses suffit à lever l'indétermination.
 - ▶ Formulation sous forme d'une fonctionnelle de coût à minimiser.

LE MODÈLE

- ▶ Soit la fonctionnelle de coût suivante :

$$E(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\nabla I^T \mathbf{v} + I_t)^2 dx dy + \alpha^2 \int_{\Omega} \|\nabla \mathbf{v}\|^2 dx dy \quad (4)$$

- ▶ Premier terme : contrainte du flot optique.
- ▶ Second terme : contrainte de régularité sur \mathbf{v} .
- ▶ E est une **fonctionnelle** car dépendant d'une fonction \mathbf{v} :

$$E : L^2(\Omega) \rightarrow [0, +\infty[$$

- ▶ Ω : domaine de l'image (borné).

LE MODÈLE (SUITE)

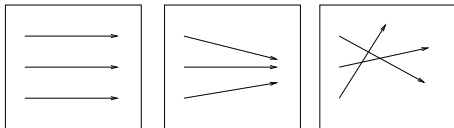
- ▶ Intuitivement : E sera d'autant plus petit que

- (1) la contrainte du flot optique est proche de zéro,
- (2) le champ des vitesses w est régulier.

- ▶ $\|\nabla \mathbf{v}\|^2 = \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2$, avec $\mathbf{v} = (u, v)$

$$\|\nabla \mathbf{v}\|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2$$

- ▶ Action de la régularisation : la norme du gradient de \mathbf{v} est faible : le champ des vitesses est localement lisse et orienté dans une même direction :



- ▶ Le paramètre α pondère les effets de la régularisation.

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

- ▶ Principe : on calcule les équations d'Euler-Lagrange associées au problème de minimisation :

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}} = \begin{cases} \frac{\partial E}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial v} = 0 \end{cases}$$

- ▶ La solution du système est le minimum de l'énergie si E est convexe.
- ▶ $\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ n'est pas une dérivée au sens usuel (on dérive par rapport à une fonction !)
- ▶ Elle se définit à partir de la dérivée directionnelle (ou dérivée de Gâteau) :

$$\left\langle \frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}}, f \right\rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(\mathbf{v} + hf) - E(\mathbf{v})}{h}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

- ▶ Voir annexe 5 (ou le cours d'Antoine Manzanera) pour le calcul de la différentielle ...

$$-\nabla^2 \mathbf{v} + \alpha^2 \nabla I (\nabla I^T \mathbf{v} + I_t) = \vec{0}$$

- ▶ et de sa discrétisation en un schéma numérique stable :

$$u^{k+1} = \bar{u}^k - I_x D(\mathbf{v}^k, I)$$

$$v^{k+1} = \bar{v}^k - I_y D(\mathbf{v}^k, I)$$

$$\text{avec } \bar{u} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0.5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \end{pmatrix} \star u \text{ et } D(\mathbf{v}, I) = \frac{\nabla I^T \mathbf{v} + I_t}{\alpha^2 + \nabla I^T \nabla I}$$

MISE EN ŒUVRE

▶ Algorithme :

1. Calculer les gradients spatio-temporels de $I (I_x, I_y, I_t)$.
2. Initialiser le champ des vecteurs vitesses (u^0, v^0) à zéro,
3. Itérer :
 - ▶ calculer (u^{k+1}, v^{k+1}) à partir de (u^k, v^k) et I_x, I_y, I_t .

▶ Application :

- ▶ Il faut fixer un grand nombre d'itérations : pas de critère fiable d'arrêt : on peut surveiller la stabilisation en norme de \mathbf{v} .
- ▶ Le paramètre α^2 est fixé empiriquement : pas de méthode pour l'estimer efficacement.
- ▶ Cette valeur dépend des gradients de l'image : soit $\lambda > 0$ et considérons $J = \lambda I$, on a :

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \mathbf{v} + \alpha^2 \nabla J (\nabla J^T \mathbf{v} + J_t) &= 0 \\ -\nabla^2 \mathbf{v} + \alpha^2 \lambda^2 \nabla I (\nabla I^T \mathbf{v} + I_t) &= 0 \end{aligned}$$

DES RÉSULTATS

FIGURE: Séquence taxi : 100 itérations, $\alpha^2 = 30$

DES RÉSULTATS

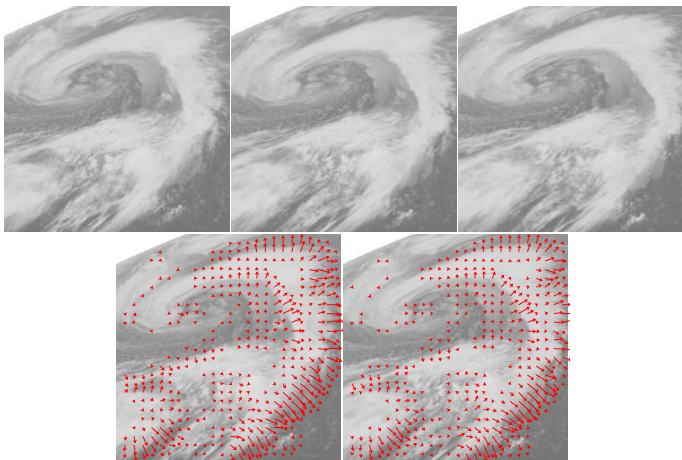


FIGURE: Séquence météo : 100 itérations, $\alpha^2 = 30$

DES RÉSULTATS

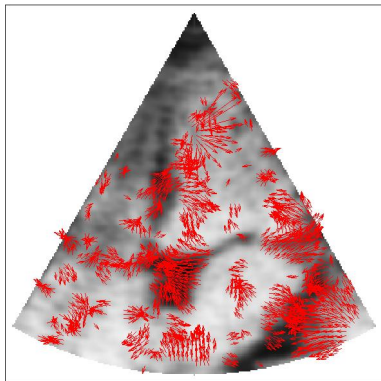


FIGURE: Séquence écho : 200 itérations, $\alpha = 20$

COMMENTAIRES

- ▶ Champ dense de vecteurs.
- ▶ Rapide (par rapport au bloc-matching).
- ▶ Robuste.
- ▶ Respect de l'hypothèse du flot optique, sinon il faut envisager d'autres contraintes de mouvement.
- ▶ Illumination globale ?
- ▶ Contrainte de régularité :
 - ▶ peut être trop contraignante,
 - ▶ problème des occlusions ?

Méthodes locales

Approche paramétrique

APPROCHE PARAMÉTRIQUE

LIENS ENTRE *Block-Matching* ET FLOT OPTIQUE : APPROCHE
DE [LUCAS AND KANADE, 1981]

- ▶ Pas de régularisation spatiale mais un modèle paramétrique pour les champs de vitesse (ici constant par morceaux).
- ▶ Initialement développée dans une application de recalage (rigide).
- ▶ Le problème est donc :

$$\text{trouver } \mathbf{v} \text{ tel que } I_2(\mathbf{x} + \mathbf{v}) = I_1(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}$$

- ▶ On minimise donc :

$$E(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{x}} (I_2(\mathbf{x} + \mathbf{v}) - I_1(\mathbf{x}))^2 \quad (5)$$

- ▶ \mathbf{v} est un vecteur de trop grande taille : une minimisation combinatoire est trop coûteuse.

MÉTHODE LUCAS & KANADE

- ▶ Restriction à une fenêtre d'observation pour un pixel donné :

$$E(\mathbf{v}_x) = \sum_{\mathbf{y} \in W_x} (I_2(\mathbf{y} + \mathbf{v}_x) - I_1(\mathbf{y}))^2 \quad (6)$$

où W_x est une fenêtre centrée autour du pixel \mathbf{x} .

- ▶ On reconnaît la formule du *bloc matching* si $\text{sim}(I_1, I_2) = (I_2(\mathbf{y} + \mathbf{v}_x) - I_1(\mathbf{y}))^2$.
- ▶ Linéarisation du coût quadratique (développement Taylor à l'ordre 1) :

$$I_2(\mathbf{y} + \mathbf{v}_x) \sim I_2(\mathbf{y}) + \langle \nabla I_2(\mathbf{y}), \mathbf{v}_x \rangle$$

- ▶ L'équation (6) devient :

$$E(\mathbf{v}_x) = \sum_{\mathbf{y} \in W_x} (I_2(\mathbf{y}) - I_1(\mathbf{y}) + \langle \nabla I_2, \mathbf{v}_x \rangle)^2 \quad (7)$$

MÉTHODE LUCAS & KANADE

- ▶ On pose $l_{21}(\mathbf{y}) = l_2(\mathbf{y}) - l_1(\mathbf{y})$. C'est une donnée d'entrée (la dérivée temporelle).
- ▶ Le terme $l_{21}(\mathbf{y}) + \langle \nabla l_2(\mathbf{y}), \mathbf{v}_x \rangle$ est linéaire en \mathbf{v}_x (vecteur à deux composantes).
- ▶ On note l_2 le vecteur colonne constituée des composantes ($l_2(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in W_x$), idem pour l_{21} .
- ▶ Important à voir : si on a n composantes dans W_x alors ∇l_2 est une matrice $n \times 2$:

$$\nabla l_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial l}{\partial x}(\mathbf{y}_1) & \frac{\partial l}{\partial y}(\mathbf{y}_1) \\ \dots & \dots \\ \frac{\partial l}{\partial x}(\mathbf{y}_n) & \frac{\partial l}{\partial y}(\mathbf{y}_n) \end{pmatrix}$$

- ▶ Résultat : la valeur de \mathbf{v}_x qui minimise l'énergie (7) est donnée directement par la formule des moindres carrés (voir annexe 6) :

$$\mathbf{v}_x = - \left(\nabla l_2 \nabla l_2^T \right)^{-1} \nabla l_2 l_{21}$$

LUCAS KANADE : RÉSULTATS



FIGURE: Plan 5, $t_b = 0.9$, $t_h = 5$. Bleu : $W = 5$, rouge : $W = 10$, noir : $W = 15$.

AUTRES MÉTHODES PARAMÉTRIQUES

- ▶ On peut perfectionner le modèle paramétrique de mouvement : par exemple, considérer des mouvements affines [Odobez and Bouthemy, 1995].

$$w(x, y) = \begin{cases} a + bx + cy \\ d + ex + fy \end{cases}$$

- ▶ Hypothèse un peu restrictive, en pratique, on va supposer le mouvement affine par morceaux : les images sont découpées en petites zones avec pour chacune d'entre elles un modèle affine propre.
- ▶ On peut complexifier le modèle : polynôme d'ordre deux, voire approximation par splines (complexe).
- ▶ On peut également améliorer le modèle d'illumination : pas de variation des n.d.g. \Rightarrow contrainte de variation constante de n.d.g. :

$$\frac{dl}{dt} = \nabla I^T \mathbf{v} + I_t = -\xi, \quad \xi \geq 0$$

MODÈLE DE MOUVEMENT

- ▶ Écriture matricielle : $\mathbf{v}(x, y) = B(x, y)A$ avec

$$B(x, y) = \begin{cases} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{cases}$$

$$A = (a, b, c, d, e, f)^T$$

- ▶ Erreur à minimiser :

$$\mathcal{E}(\Theta) = \sum_{i=1}^n (\nabla I^T(x_i, y_i)B(x_i, y_i)A + I_t(x_i, y_i) + \xi)^2$$

- ▶ Question : lien entre Lucas/Kanade et ce modèle ?

MODÈLE DE MOUVEMENT

- ▶ Écriture matricielle : $\mathbf{v}(x, y) = B(x, y)A$ avec

$$B(x, y) = \begin{cases} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{cases}$$

$$A = (a, b, c, d, e, f)^T$$

- ▶ Erreur à minimiser :

$$\mathcal{E}(\Theta) = \sum_{i=1}^n (\nabla I^T(x_i, y_i)B(x_i, y_i)A + I_t(x_i, y_i) + \xi)^2$$

- ▶ Question : lien entre Lucas/Kanade et ce modèle ?
- ⇒ Extension de la méthode de Lucas-Kanade : si $c = d = e = f = \xi = 0$, on retrouve Lucas-Kanade.

RÉSULTATS

- ▶ Résolution par moindre carré (voir annexe 7).

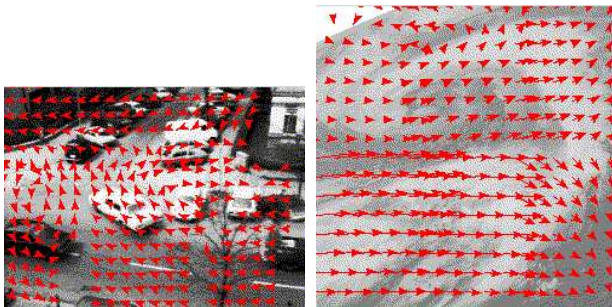


FIGURE: Modèle affine sur des blocs de 32×32 pixels

INTRODUCTION

ÉTAT DE L'ART

SPÉCIFICITÉS DE L'IMAGERIE MÉDICALE

Grands déplacements

- Résolution dans le cadre variationnel

- Méthodes incrémentales

- Méthodes multiéchelles

Mouvement fluide/élastique/non rigide

- Quelques notions de mécanique des fluides

- Régularisation adaptée

- Contrainte de mouvement adaptée

Dynamique temporelle

APPLICATIONS

Spécificités de l'imagerie médicale

Grands déplacements

PROBLÉMATIQUE

- ▶ La contrainte de flot optique (équation (2)) est une approximation de l'équation de transport de la luminosité (équation (1)).
- ▶ Elle n'est donc valable que pour les petits déplacements !
- ▶ En pratique, on ne peut régler l'échantillonnage temporel.
- ▶ Comment gérer ces grands déplacements ?
 1. Résolution de l'équation (1) : on connaît déjà *block matching* ou les algorithmes de recalage.
Peut-on la résoudre dans un cadre variationnel ?
 2. Méthodes incrémentales et/ou multirésolutions.
 3. Méthodes multi-échelles (abordées dans l'UE AMO).
- ▶ Utilité en médical : mouvement de forte amplitude (ex : cœur), recalage.

Grands déplacements

Résolution dans le cadre variationnel

MÉTHODE VARIATIONNELLE [BROX ET AL., 2004]

- ▶ Idée : ne pas linéariser l'équation du flot optique :

$$I(\mathbf{x} + w\delta t, t + \delta t) = I(\mathbf{x}, t)$$

- ▶ Donc : calculer directement la différentielle !
- ▶ Différentielle par rapport à u , calculer :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{E(u + \alpha f, v) - E(u, v)}{\alpha}$$

- ▶ L'expression contient des termes en αf qui tendent vers 0 (à cause de la limite) : on peut donc utiliser un D.L. (ce n'est plus une approximation) !
- ▶ Cette remarque permet le calcul effectif de la différentielle :

$$\frac{\partial E}{\partial w}(\mathbf{x}) = 2\nabla I(\mathbf{x} + w\delta t, t + \delta t)[I(\mathbf{x} + w\delta t, t + \delta t) - I(\mathbf{x}, t)]$$

- ▶ Exercice : le vérifier.

MÉTHODE VARIATIONNELLE [BROX ET AL., 2004]

- ▶ De plus, Brox propose d'ajouter une seconde contrainte : une équation de transport du gradient.
- ▶ L'intérêt n'est pas de lever le problème de l'ouverture MAIS de gérer les problèmes des changements constants d'illumination.
- ▶ En effet :

$$I(\mathbf{x} + w\delta t, t + \delta t) - I(\mathbf{x}, t) = a \rightarrow \nabla I(\mathbf{x} + w\delta t, t + \delta t) - \nabla I(\mathbf{x}, t) = 0$$
- ▶ Deux contraintes MAIS le problème reste mal posé, il faut régulariser.
- ▶ Finalement, on minimise :

$$\begin{aligned}
 E(w) = & \int \|I(\mathbf{x} + w\delta t, t + \delta t) - I(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x} \\
 & + \int \gamma \|\nabla I(\mathbf{x} + w\delta t, t + \delta t) - \nabla I(\mathbf{x}, t)\|^2 d\mathbf{x} \\
 & + \int \alpha \|\nabla w\|^2 d\mathbf{x}
 \end{aligned}$$

Grands déplacements

Méthodes incrémentales

MODÈLE INCRÉMENTAL ET MULTIRÉSOLUTIONS

- ▶ Principe du multirésolution : faire le calcul à une résolution grossière puis améliorer ce résultat en passant à une résolution plus fine.
- ▶ But : améliorer la précision du calcul du flot optique sur les cas de grand déplacement.
- ▶ Ceci est rendu possible grâce à un calcul *incrémentale* entre chaque résolution.
- ▶ Le passage d'une résolution à l'autre :

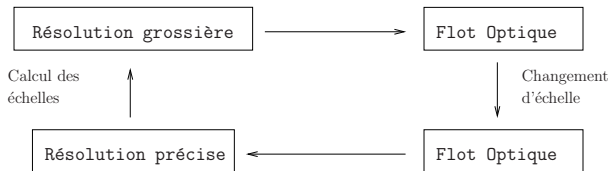


FIGURE: Passage d'une résolution à l'autre.

CONSTRUCTION DES RÉOLUTIONS

- ▶ $I(x, y, t)$ image originale (niveau 0, la plus fine) : $I^0(x, y, t)$.
- ▶ Passage de la résolution k à la résolution $k + 1$:

$$I^{k+1}(x, y, t) = I_{ech}^k \star G_{\sigma}(x', y', t)$$

- ▶ I_{ech} image I deux fois surechantillonnée.
- ▶ Noyau gaussien de lissage d'écart-type σ .

CONSTRUCTION DES RÉOLUTIONS (SUITE)

- ▶ Ω^k l'espace de chaque fonction I^k . Les espaces vérifient :

$$\Omega^N \subset \dots \Omega^{k+1} \subset \Omega^k \subset \dots \subset \Omega^0$$

- ▶ N résolution maximale : une image réduite à 2×2 pixels. On a $N = \log_2 |\Omega| - 1$.

PYRAMIDE DES RÉOLUTIONS

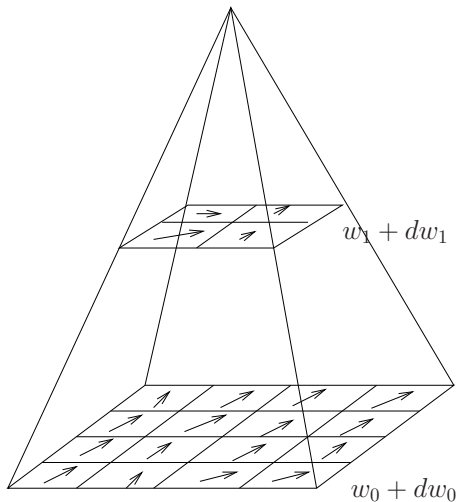


FIGURE: Pyramide sur deux niveaux de résolution.

PASSAGE D'UNE RÉOLUTION À L'AUTRE : MÉTHODE INCRÉMENTALE

- ▶ Notation : $\mathbf{x} = (x, y)$, \mathbf{v}^k vitesse à la résolution k .
- ▶ $\delta\mathbf{v}^k$: vitesse incrémentale définie telle que $\mathbf{v}^{k+1} + \delta\mathbf{v}^k = \mathbf{v}^k$
- ▶ Contrainte du flot optique à la résolution k :

$$\begin{aligned} D^k(\mathbf{x}, t) &= I^k(\mathbf{x} + \mathbf{v}^k \delta t, t + \delta t) - I^k(\mathbf{x}, t) \\ &= I^k(\mathbf{x} + (\mathbf{v}^{k+1} + \delta\mathbf{v}^k) \delta t, t + \delta t) - I^k(\mathbf{x}, t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

PASSAGE D'UNE RÉOLUTION À UNE AUTRE

- ▶ Développement de Taylor de I^k au point $\mathbf{x} + \mathbf{v}^k \delta t$:

$$I^k(\mathbf{x} + (\mathbf{v}^{k+1} + \delta \mathbf{v}^k) \delta t, t + \delta t) \sim I^k(\mathbf{x} + \mathbf{v}^{k+1} \delta t, t + \delta t) + \nabla I^k(\mathbf{x} + \mathbf{v}^{k+1}, t + \delta t) \delta \mathbf{v}^k \delta t$$

- ▶ Remplaçons dans D^k :

$$D^k(\mathbf{x}, t) = I^k(\mathbf{x} + \mathbf{v}^{k+1} \delta t, t + \delta t) - I^k(\mathbf{x}, t) + \nabla I^k(\mathbf{x} + \mathbf{v}^{k+1} \delta t, t + \delta t) \delta \mathbf{v}^k \delta t = 0$$

- ▶ Posons : $\tilde{I}^k(\mathbf{x}, \mathbf{v}^{k+1}, t) = I^k(\mathbf{x} + \mathbf{v}^{k+1} \delta t, t + \delta t) - I^k(\mathbf{x}, t)$, nous obtenons la contrainte de mouvement suivante sur $\delta \mathbf{v}^k$:

$$\tilde{I}^k(\mathbf{x}, \mathbf{v}^{k+1}, t) + \nabla I^k(\mathbf{x} + \mathbf{v}^{k+1} \delta t, t + \delta t) \delta \mathbf{v}^k \delta t = 0$$

PASSAGE D'UNE RÉOLUTION À UNE AUTRE

► Algorithme :

1. Construction des résolutions I^k
2. Résolution N : $\mathbf{v}^N = 0$, on calcule $\delta\mathbf{v}^N$
3. Résolution k : déduction de \mathbf{v}^k à partir de la résolution $k + 1$:

$$\tilde{I}^k(\mathbf{x}, \mathbf{v}^{k+1}, t) + \nabla I^k(\mathbf{x} + \mathbf{v}^{k+1}\delta t, t + \delta t)\delta\mathbf{v}^k\delta t = 0$$

$$\mathbf{v}^k = \mathbf{v}^{k+1} + \delta\mathbf{v}^k$$

4. Répéter le point 3. jusqu'à la résolution la plus fine.

► Implémentations :

- Modèle paramétrique (affine) : [Odobez and Bouthemy, 1995].
- Modèle variationnel : [Proesmans et al., 1994] (sans multirésolutions).

Grands déplacements

Méthodes multiéchelles

LE PROBLÈME DE LA PORTÉE DES GRADIENTS

- ▶ (Presque) toutes les méthodes reposent sur l'hypothèse fondamentale du transport de la luminosité.
- ▶ La linéarisation mène à la contrainte de flot optique (OFC) : basée uniquement sur les gradients (spatio-temporels) de l'image.
- ▶ Que se passe-t-il lorsque :
 - ▶ le mouvement à détecter est trop grand ?

LE PROBLÈME DE LA PORTÉE DES GRADIENTS

- ▶ (Presque) toutes les méthodes reposent sur l'hypothèse fondamentale du transport de la luminosité.
- ▶ La linéarisation mène à la contrainte de flot optique (OFC) : basée uniquement sur les gradients (spatio-temporels) de l'image.
- ▶ Que se passe-t-il lorsque :
 - ▶ le mouvement à détecter est trop grand ? L'opérateur gradient échoue dans sa détection ! En effet : Gradient spatial \rightarrow filtre type Sobel (voisinage 3×3). Si le mouvement dépasse le voisinage du filtre de dérivation : on perd l'information.
 - ▶ le mouvement à détecter est trop petit ?

LE PROBLÈME DE LA PORTÉE DES GRADIENTS

- ▶ (Presque) toutes les méthodes reposent sur l'hypothèse fondamentale du transport de la luminosité.
- ▶ La linéarisation mène à la contrainte de flot optique (OFC) : basée uniquement sur les gradients (spatio-temporels) de l'image.
- ▶ Que se passe-t-il lorsque :
 - ▶ le mouvement à détecter est trop grand ? L'opérateur gradient échoue dans sa détection ! En effet : Gradient spatial \rightarrow filtre type Sobel (voisinage 3×3). Si le mouvement dépasse le voisinage du filtre de dérivation : on perd l'information.
 - ▶ le mouvement à détecter est trop petit ? la même chose en définitive si le mouvement est trop petit par rapport à la taille du filtre.

APPROCHES MULTI-ÉCHELLES

- ▶ Nécessité de calculer le gradient à différentes *échelles*.
- ▶ Théorie des espaces d'échelles : on sort du cadre de ce cours (AMO).
- ▶ Un élément de réponse : comment sont calculés les gradients ?
- ▶ Approximation par différences finies :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x + \delta) - f(x - \delta)}{2\delta}$$

On peut régler la portée de la dérivée selon la valeur de δ mais si δ est trop grand, on perd l'information dans l'intervalle $]x - \delta, x + \delta[$.
Si δ trop petit : on ne capture pas le gradient induit par un fort mouvement.

APPROCHES MULTI-ÉCHELLES

- ▶ Convolution par un noyau gaussien.
 - ▶ Propriété : $(f \star g)' = f \star g'$
 - ▶ f = image, g = noyau gaussien, on le dérive explicitement.
 - ▶ $g_s(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2s^2}}$. s est un paramètre d'échelle.
 - ▶ On dérive une version lissée de l'image : les détails inférieurs à l'échelle s sont intégrés (voir définition de la convolution) dans le calcul de la dérivée.
 - ▶ Avec des échelles s grandes : on augmente la portée de la dérivée (tous en lissant les détails les plus petits) :
 - ▶ $s = 0.7$, masque de convolution 7×7
 - ▶ $s = 1$, masque de convolution 9×9
 - ▶ $s = 1.3$, masque de convolution 11×11
- au-delà, les coefficients de la gaussienne sont quasi-nuls.

Spécificités de l'imagerie médicale

Mouvement fluide/élastique/non rigide

PROBLÉMATIQUES MÉDICALES LIÉES À L'ESTIMATION DU MOUVEMENT FLUIDE

- ▶ Vitesse d'écoulement du sang.
- ▶ Organes souples à grandes déformations (cœur, poumons).
- ▶ Recalage (atlas en imagerie cérébrale).

DIVERGENCE

- ▶ Définition dans \mathbb{R}^3 : $\mathbf{V} = (u, v, w)^T$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \text{div}(\mathbf{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{trace}(\nabla \mathbf{V})$$

- ▶ Définition dans \mathbb{R}^2 : $\mathbf{V} = (u, v)^T$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \text{div}(\mathbf{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

- ▶ Que mesure la divergence ? Soit \mathbf{V} la vitesse d'un élément de volume δA , on a :

$$\text{div}(\mathbf{V}) = \frac{1}{\delta A} \frac{d\delta A}{dt}$$

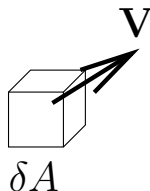


FIGURE: Divergence sur un élément de

ROTATIONNEL

- ▶ Définition dans \mathbb{R}^3 : $\mathbf{V} = (u, v, w)^T$

$$\nabla \wedge \mathbf{V} = \text{curl}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- ▶ Définition dans \mathbb{R}^2 : $\mathbf{V} = (u, v)^T$

$$\text{curl}(\mathbf{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

On peut alors considérer que le rotationnel est un vecteur orthogonal au plan $(0xy)$.

- ▶ Les points tels que $\text{curl}(\mathbf{V}) = 0$ sont appelés *irrotationnels* de V .

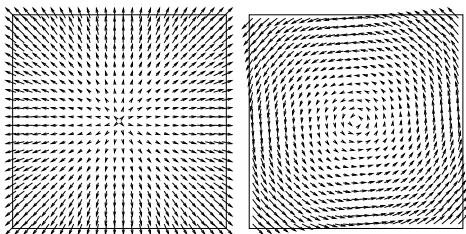
QUELQUES PROPRIÉTÉS ...

L'opérateur $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)^T$ est très pratique ! Il sert à définir le gradient (ou jacobien), le laplacien, la divergence et le rotationnel.

- ▶ Notation : f est un champ scalaire et F un champ de vecteur (différentiable).
- ▶ Prop 1 : $\nabla \wedge (\nabla f) = 0$
- ▶ Prop 2 : $\nabla \cdot (\nabla \wedge F) = 0$
- ▶ Laplacien : $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f$
- ▶ pour F : $\Delta F = (\Delta F_1 \quad \Delta F_2 \quad \Delta F_3)$
- ▶ Beaucoup de relations entre ces opérateurs, en voici quelques unes :
 - ▶ $\nabla \cdot (fF) = f \nabla \cdot F + \nabla f \cdot F$
 - ▶ $\nabla \wedge (fF) = f \nabla \wedge F + \nabla f \wedge F$
 - ▶ $\nabla \cdot (F \wedge G) = \nabla \wedge \cdot G - F \cdot \nabla \wedge G$
 - ▶ ...

CARATÉRISATION D'UN CHAMP DE VECTEURS 2D

- ▶ Rotationnel et divergence caractérisent un champ de vecteurs :



(a) Champ divergent (b) Champ rotationnel

FIGURE: Exemple de champs (affines) divergent ou rotationnel.

- ▶ Exercice : soit un champ 2D affine. Donnez une CNS pour que le champ soit :
 - ▶ purement divergent,
 - ▶ purement rotationnel.

$$u(x, y) = a + bx + cy$$

$$v(x, y) = d + ex + fy$$

▶ $u_x = b, \quad u_y = c, \quad v_x = e, \quad v_y = f$

▶ $\nabla \cdot w = b + f, \quad \nabla \wedge w = e - c$

CONSERVATION DE LA MASSE

- ▶ Principe de conservation de l'énergie : s'applique bien évidemment à la masse !
- ▶ Soit un élément de **volume** δA de géométrie fixe traversée par un fluide de masse volumique ρ et de mouvement \mathbf{V} .
- ▶ Le bilan des masses entrantes et sortantes est constant (Loi de Flick) :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \mathbf{V})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} + \rho \operatorname{div}(\mathbf{V}) = 0$$

CAS DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

- ▶ On a vu que la divergence sert à mesurer l'expansion d'un fluide.
- ▶ Définition (intuitive) : un fluide est incompressible si $\text{div}(\mathbf{V}) = 0$.
- ▶ Conservation de la masse d'un fluide incompressible :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} + \rho \text{div}(\mathbf{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} = 0$$

- ▶ Ce principe est valable en 3D mais pas en 2D (sauf exception) : la matière peut *a priori* transiter à travers le plan de section considéré.
- ▶ On verra comment appliquer ce principe sur des images (2D).

AUTRES PHÉNOMÈNES PHYSIQUES POUVANT ÊTRE PRIS EN COMPTE

- ▶ Phénomène de diffusion (si on s'intéresse à des espèces chimiques).
- ▶ Échanges thermiques.
- ▶ Élasticité des tissus (voir "Brain Warping").
- ▶ Viscosité (voir "Brain Warping").
- ▶ Turbulence (imagerie cardiaque, sanguine).

RÉGULARISATION ADAPTÉE

- ▶ Idée : utiliser les opérateurs div / curl pour contraindre le champ des vitesses.

$$\int_{\Omega} ((\nabla I \cdot \mathbf{V} + I_t)^2 + \alpha \text{div}(\mathbf{V})^2 + \beta \|\text{curl}(\mathbf{V})\|^2) d\mathbf{x}$$

⇒ Régularisation Div-Curl d'ordre 1.

- ▶ Selon le choix de α et β on peut favoriser/défavoriser les champs divergents/rotationnels.
- ▶ Cas des fluides incompressibles : prendre $\beta = 0$
- ▶ Cas particulier : $\alpha = \beta$. C'est Horn & Schunck !

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{V})^2 + \text{curl}(\mathbf{V})^2 &= (u_x - v_y)^2 + (v_x - u_y)^2 \\ &= u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2 + 2(u_x v_y - v_x u_y) \end{aligned}$$

$$\int (\text{div}(\mathbf{V})^2 + \text{curl}(\mathbf{V})^2) d\mathbf{x} = \int (\|\mathbf{V}\|^2 + 2(-uv_{xy} + v_{xy}u)) d\mathbf{x} \\ + \text{termes de bord}$$

RÉGULARISATION ADAPTÉE

- ▶ Cette propriété est également vraie dans \mathbb{R}^3 (flot optique 3D).
- ▶ Résolution variationnelle : équation d'Euler-Lagrange.

$$\begin{aligned} -\alpha u_{xx} + (\beta - \alpha)v_{xy} - \beta u_{yy} + I_x(\nabla I^T \mathbf{V} + I_t) &= 0 \\ -\alpha v_{xx} + (\beta - \alpha)u_{xy} - \beta v_{yy} + I_y(\nabla I^T \mathbf{V} + I_t) &= 0 \end{aligned}$$

- ▶ Si $\alpha = \beta$, on retrouve bien le HS classique.
- ▶ [Suter, 1994] la résout pour des fonctions Splines.
- ▶ Modèle paramétrique, mais formulation difficile.

RÉGULARISATION ADAPTÉE

- ▶ On peut également utiliser une régularisation d'ordre 2 i.e. :

$$\int_{\Omega} ((\nabla I \cdot \mathbf{V} + I_t)^2 + \alpha \|\nabla \operatorname{div}(\mathbf{V})\|^2 + \beta \|\nabla \operatorname{curl}(\mathbf{V})\|^2) d\mathbf{x}$$

- ▶ Les équations d'Euler Lagrange sont alors beaucoup plus complexes et font intervenir des termes dérivées d'ordre 4 et croisés.
- ▶ La discrétisation de ce type d'équation n'est pas stable (à cause des termes croisés et de l'ordre).
- ▶ L'implémentation splines (également faite par Suter) s'impose !

RÉGULARISATION L^1

- ▶ Utiliser une norme L^1 ([Cohen, 1993]) :

$$\int_{\Omega} ((\nabla I \cdot \mathbf{V} + I_t)^2 + \alpha \Phi(\|\nabla\|)) dx$$

avec $\Phi(s) = s$.

- ▶ Autorise davantage de discontinuités dans le champ résultat.
- ▶ Les équations d'Euler-Lagrange sont plus compliquées (la norme n'est pas dérivable en 0).
- ▶ Équivalent aux approches dites de *variation totale* [Rudin et al., 1992] :

$$\operatorname{argmin}_{(\nabla I^T \mathbf{W} + I_t)^2 = \sigma} \int \|\nabla \mathbf{W}\| dx dy$$

- ▶ D'autres fonctions Φ convexes, appelées "Estimateurs robustes" [Mémin et al., 1996]

RÉGULARISATION ORIENTÉE (NAGEL)

- ▶ Préserver les discontinuités du champ des vitesses (occultation) [Nagel, 1987],
- ▶ Le terme de régularisation peut s'écrire :

$$\iint_{\Omega} \alpha^2 \operatorname{tr} \left((\nabla \mathbf{v})^T \nabla \mathbf{v} \right) dx dy$$

- ▶ Modification de la norme :

$$\iint_{\Omega} \alpha^2 \operatorname{tr} \left((\nabla \mathbf{v})^T V \nabla \mathbf{v} \right) dx dy$$

où V est un tenseur (matrice 2×2 symétrique) telle que :

$$V = \frac{1}{\|\nabla I\|_2^2 + 2\delta} W \quad W = \begin{pmatrix} I_y^2 + \delta & -I_x I_y \\ -I_x I_y & I_x^2 + \delta \end{pmatrix}$$

RÉGULARISATION ORIENTÉE (SUITE)

- ▶ Le paramètre δ permet de rendre inversible W ($\delta = 0 \Rightarrow \det(W) = 0$).
- ▶ Le numérateur de V normalise la matrice W .
- ▶ Grâce à δ , le numérateur est toujours défini.
- ▶ Posons momentanément $\delta = 0$, on a :
 - ▶ $W = \begin{pmatrix} -I_y \\ I_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -I_y & I_x \end{pmatrix}$
 - ▶ Le terme de régularisation est de la forme :

$$\iint_{\Omega} \text{tr}((U\nabla\mathbf{v})^T(U\nabla\mathbf{v}))$$

avec $U = \begin{pmatrix} -I_y & I_x \end{pmatrix}$

RÉGULARISATION ORIENTÉE (SUITE)

- ▶ Lorsque $\nabla \mathbf{v}$ est orthogonal au gradient de l'image ∇I , le produit scalaire est proche de zéro : la contrainte de régularisation n'intervient pas.
- ▶ Autre écriture de la contrainte (en développant) :

$$E'_2(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \frac{\alpha^2}{\|\nabla I\|_2^2 + 2\delta} [(u_x I_x + u_y I_y)^2 + (v_x I_y - v_y I_x)^2 + \delta(\nabla u^2 + \nabla v^2)] dx dy \quad (8)$$

ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION ASSOCIÉES

Elles sont similaires à H&S :

$$\begin{cases} u^{k+1} = \eta(u^k) - l_x \frac{l_x \eta(u^k) + l_y \eta(v^k) + l_t}{\alpha^2 + l_x^2 + l_y^2} \\ v^{k+1} = \eta(v^k) - l_y \frac{l_x \eta(u^k) + l_y \eta(v^k) + l_t}{\alpha^2 + l_x^2 + l_y^2} \end{cases}$$

avec :

$$\eta(f) = \bar{f} - 2l_x l_y f_{xy} - q^T (\nabla f)$$

$$q = \frac{1}{l_x^2 + l_y^2 + 2\delta} \nabla l^T \left[\begin{pmatrix} l_{yy} & -l_{xy} \\ -l_{xy} & l_{xx} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} l_{xx} & l_{xy} \\ l_{xy} & l_{yy} \end{pmatrix} v \right]$$

RÉSULTATS



FIGURE: Séquence Taxi 1, $\delta = 10$, $\alpha = 5$

RÉSULTATS (SUITE)

FIGURE: Séquence Taxi 1, $\delta = 10$, $\alpha = 1$

CONSERVATION DE LA MASSE 2D

- ▶ Plusieurs auteurs ont utilisé l'équation de conservation de la masse en 2D, c'est-à-dire minimiser :

$$\int ((\operatorname{div}(I\mathbf{V}) + I_t)^2 + \alpha \|\nabla \mathbf{V}\|^2) d\mathbf{x}$$

- ▶ $\operatorname{div}(I\mathbf{V}) = \nabla I^T \mathbf{V} + I \operatorname{div}(\mathbf{V})$
 - ▶ [Wildes and Amabile, 1997] l'utilise dans le contexte d'écoulement du sang en imagerie X (avec liquide de contraste) : justification plus loin dans ce cours.
 - ▶ [Schunck, 1986] et [Nagel, 1989] l'utilisent dans un cadre standard. Nagel montre qu'elle permet de reconstruire le mouvement véritable sous certaines conditions (restrictives).

DYNAMIQUE TEMPORELLE

- ▶ Exploiter l'information temporelle sous jacente dans les acquisitions de séquence d'images ?
- ▶ Une information supplémentaire qui pourrâit éviter/limiter la régularisation spatiale ?
- ▶ Première idée (Weickert *et al.*) : régulariser en temps et en espace :

$$E(\mathbf{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} ((\nabla I^T \mathbf{v} + I_t)^2 + \alpha^2 \|\nabla_3 \mathbf{v}\|^2) dx dy dt$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \right)^T, \quad \nabla_3 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)^T,$$

⇒ calculer une solution lisse dans l'espace-temps.

HEURISTIQUE SUR LA DYNAMIQUE

- ▶ Utiliser une connaissance (imparfaite) sur la dynamique
- ▶ Un modèle M de la dynamique qui décrit comment la vitesse évolue au cours du temps :

$$\frac{\partial \mathbf{v}(x, y, t)}{\partial t} = M(\mathbf{v})(x, y, t)$$

- ▶ Exemple d'heuristique : supposer que la vitesse est constante le long de ses trajectoires :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= 0 \\ \frac{d\mathbf{v}(x(t), y(t), t)}{dt} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{v}}^T \mathbf{v} &= 0 \end{aligned}$$

HEURISTIQUES SUR LA DYNAMIQUE

- En scalaire : $\mathbf{v} = (u, v)^T$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v = 0$$

INTÉGRATION DES HEURISTIQUES

- ▶ Résoudre :

$$\begin{aligned}\nabla I^T \mathbf{v} + I_t &= 0 \\ \mathbf{v}_t &= M(\mathbf{v})\end{aligned}$$

condition initiale sur \mathbf{v}

- ▶ Approche variationnelle ; minimiser la fonction de coût :

$$E(\mathbf{v}) = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} ((\nabla I^T \mathbf{v} + I_t)^2 + \alpha^2 \|\mathbf{v}_t - M(\mathbf{v})\|^2) dx dy dt$$

- ▶ Avec l'opérateur M simple vu précédemment : on obtient un système d'EDPs non linéaires avec dérivées partielles d'ordre 2, croisées.

SOLUTIONS ?

- ▶ Approche stochastique : filtre de Kalman (méthode online), filtrage particulaire.
- ▶ Approche variationnelle : assimilation variationnelle de données, théorie du contrôle optimal.
 - ▶ Provient des sciences de l'environnement (météorologie, océanographie)
 - ▶ Application au médical : le projet CardioScience 3D
- ▶ Assimilation variationnelle de données : un exemple (*strong* 4D-Var)

$$\operatorname{Argmin}_{\mathbf{v}} E(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N \left\| \nabla l_i^T \mathbf{v} + \frac{\partial l_i}{\partial t} \right\|^2 \quad (9)$$

$$\text{tel que } \mathbf{v}_t = M(\mathbf{v}), t \in [t_1, t_2] \quad (10)$$

4D-VAR

- ▶ Remarque : il suffit de trouver $\mathbf{v}(0)$ qui minimise (9), puisque $\mathbf{v}(t)$ ne dépend que de $\mathbf{v}(0)$ (Eq. (10)).
- ▶ Calcul du gradient :
 1. On introduit une variable (dite adjointe), λ , telle que :

$$\begin{aligned} \lambda(t_2) &= 0 \\ -\frac{\partial \lambda}{\partial t} + \left(\frac{\partial M}{\partial \mathbf{v}} \right)^* &= \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}} \right) H(I, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

avec : $H(I, \mathbf{v}) = \nabla I^T \mathbf{v} + \frac{\partial I}{\partial t}$, et $\langle Af, g \rangle = \langle f, A^*g \rangle$.

2. On a alors (Théorème de Le Dimet-Talagrand, 1981) :

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}(0)} = \lambda(t_1)$$

- ▶ Algorithme *offline* : pour calculer le gradient de E , il faut intégrer \mathbf{v} de t_1 à t_2 , puis intégrer λ **rétrogradement**, de t_2 à t_1 .

INTRODUCTION

ÉTAT DE L'ART

SPÉCIFICITÉS DE L'IMAGERIE MÉDICALE

APPLICATIONS

IRM Cardiaque : IRM tagging

Vitesse écoulement sanguin

Recalage

Atlas en imagerie cérébrale : "Brain Warming"

Visualisation des champs de vitesses

Applications

IRM Cardiaque : IRM tagging

IMAGERIE CARDIAQUE

MOUVEMENT DU MYOCARDE

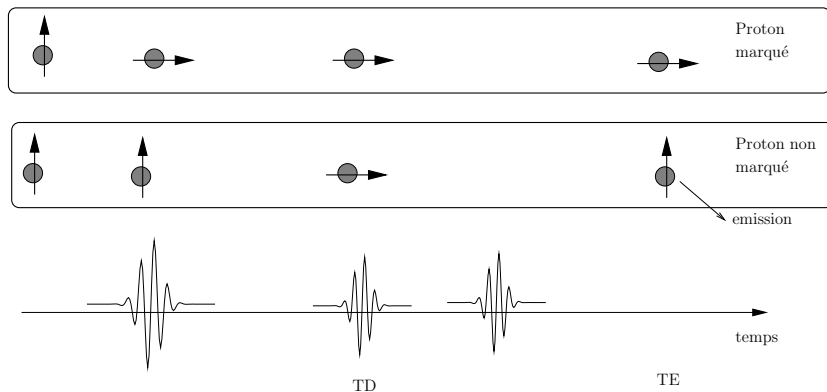
- ▶ La mesure détaillée du mouvement cardiaque permet le diagnostic de certaines maladies du cœur.
- ▶ En particulier, le mouvement intra-myocardien est important !
- ▶ Contraintes liées à l'organe :
 - ▶ L'examen doit être non invasif !
 - ▶ Les temps d'acquisition compatible avec le cycle cardiaque.
- ▶ Difficultés selon les modalités :
 - ▶ En échocardiographie : le myocarde contient beaucoup de *speckle*.
 - ▶ En CT et en IRM : trop faible contraste du myocarde.
 - ▶ En radiographie : bon résultats avec des marqueurs métalliques mais incompatible pour l'utilisation clinique.
 - ▶ Imagerie IRM de vitesse (pour le sang) : incompatibilité d'acquisition avec la dynamique cardiaque (forte irrégularités en ordre 2 : accélérations)

TECHNIQUE DU MARQUAGE (TAGGING) EN IRM

IMAGERIE CARDIAQUE & MOUVEMENT

- ▶ Les temps d'acquisitions en IRM (spin écho) sont compatibles avec la période du cycle cardiaque (quitte à jouer sur la cyclicité cardiaque).
- ▶ Problème du faible contraste du myocarde : on marque magnétiquement ces zones pour augmenter leur contraste : "Tagged RM Imaging"
- ▶ Principe du marquage magnétique :
 1. On sature les spins des protons par un signal RF (intensité, fréquence à choisir).
 2. Le temps de désaturation (dépend principalement de T_1) est suffisamment long pour rester opaque pendant l'acquisition IRM.
 3. En conjonction avec les gradients de champs et de l'angle du signal de saturation, on peut cibler géographiquement les régions à marquer.
 4. Après marquage magnétique : série d'acquisitions IRM.
 5. Suivi temporel des zones marquées possible si le temps de désaturation $\gg T_2$

MARQUAGE EN IRM : PRINCIPE DE L'ACQUISITION



MODÉLISATION DES SIGNAUX IRM

- ▶ Rappel : équation de Bloch (voir cours d'Isabelle Bloch) au point \mathbf{x}_0

$$\psi(\mathbf{x}_0, t) = M_0(\mathbf{x}(t))(1 - e^{-T_R/T_1(\mathbf{x}(t))})e^{-T_E/T_2(\mathbf{x}(t))}$$

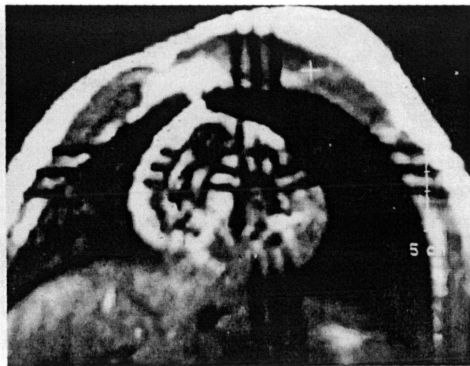
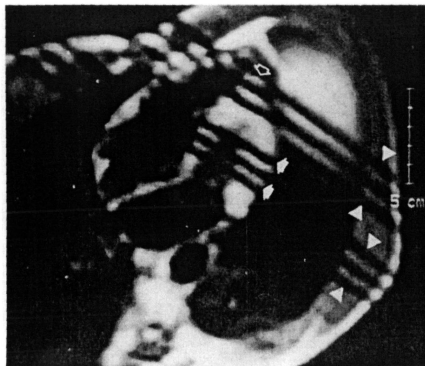
avec :

- ▶ \mathbf{x} trajectoire de \mathbf{x}_0 ($\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$).
 - ▶ $M_0(\mathbf{x})$ densité de protons (au point \mathbf{x}),
 - ▶ $T_1(\mathbf{x})$ temps de relaxation longitudinale,
 - ▶ $T_2(\mathbf{x})$ temps de relaxation transversal,
 - ▶ T_E temps de l'écho spin,
 - ▶ T_R temps de répétition.
- ▶ Équation de Bloch pour les zones marquées :

$$\psi^*(\mathbf{x}_0, t) = M_0(\mathbf{x}(t))e^{-T_E/T_2(\mathbf{x}(t))} (\cos \Phi(\mathbf{x}(t)) - 1) \left(e^{-t/T_1(\mathbf{x}(t))} - e^{-T_R/T_1(\mathbf{x}(t))} \right)$$

Φ orientation par rapport à la direction de marquage.

EXEMPLE D'ACQUISITION



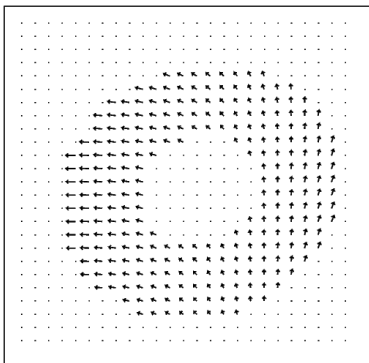
APPLICATION À L'ESTIMATION DU MOUVEMENT DU MYOCARDE

- ▶ Les zones de marquage ont un fort contraste qui accroche les algorithmes de F.O.
- ▶ Le suivi des zones marquées est possible : on peut caractériser le champ des vitesses à l'intérieur du myocarde.

EXEMPLE SYNTHÉTIQUE EN IRM



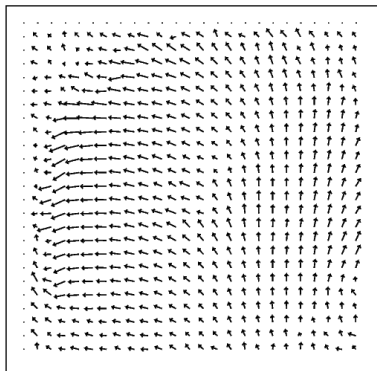
(a) Un plan de la séquence



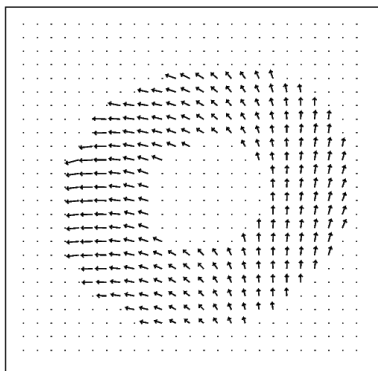
(b) Champ réel

FIGURE: Exemple en IRM marqué sur un fantôme en rotation.

EXEMPLE SYNTHÉTIQUE EN IRM (SUITE)



(a) Champ estimé



(b) Champ estimé et masqué

FIGURE: Résultat du calcul du flot optique (Horn & Schunk).

ESTIMATION DU FLOT OPTIQUE SUR EN IRM MARQUÉE

- ▶ Malgré le fort contraste des zones marquées, la contrainte du flot optique n'est pas valide en IRM.
- ▶ Les équations de Bloch fournissent le modèle d'évolution temporel de la luminosité (pour les régions marquées ou non marquées).
- ▶ Contrainte de flot optique modifiée :
 - ▶ ψ image IRM.
 - ▶ Le long des trajectoires $\mathbf{x}(t)$, le niveau de gris suit les équations de Bloch (hypothèse standard : niveau de gris constant).
 - ▶ En toute généralité, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \nabla\psi^T \mathbf{W} + \frac{\partial\psi}{\partial t} \\ 0 &= \nabla\psi^T \mathbf{W} + \frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{d\psi}{dt} \end{aligned}$$

CONTRAİNTE DE FLOT OPTIQUE VARIABLE

- ▶ $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ est calculée à partir de l'image
- ▶ $\frac{d\psi}{dt}$ est calculée à partir des équations de Bloch :

$$\psi^*(\mathbf{x}, t) = M_0(\mathbf{x})e^{-T_E/T_2(\mathbf{x})} (\cos \Phi(\mathbf{x}) - 1) \times \left(e^{-t/T_1(\mathbf{x})} - e^{-T_R/T_1(\mathbf{x})} \right)$$

$$\frac{d\psi^*}{dt}(\mathbf{x}, t) = -\frac{M_0(\mathbf{x})}{T_1(\mathbf{x})} (\cos \Phi(\mathbf{x}(t)) - 1) \times \left(e^{-t/T_1(\mathbf{x}(t))} - e^{-T_R/T_1(\mathbf{x}(t))} \right)$$

- ▶ Difficulté à résoudre :
 - ▶ $\frac{d\psi^*}{dt}(\mathbf{x}, t)$ est calculé le long d'une trajectoire \mathbf{x} qui n'est pas connue a priori.
 - ▶ On procède ainsi : calcul de \mathbf{W} au premier temps discret, puis extrapolation de la trajectoire

$$\mathbf{x}(t + \tau) = \mathbf{x}(t) + \tau \mathbf{W}(\mathbf{x}(t), t)$$

FLOT OPTIQUE VARIABLE EN IRM MARQUÉE

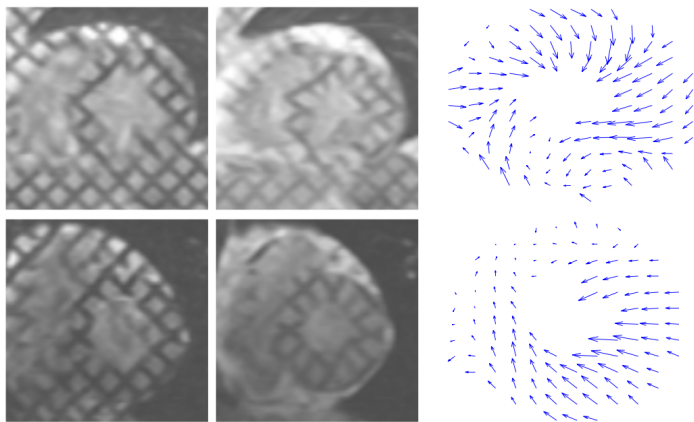


FIGURE: Résultat type sur IRM du myocarde

- Référence : [Prince and McVeigh, 1992].

FLOT OPTIQUE NON VARIABLE EN IRM MARQUÉE

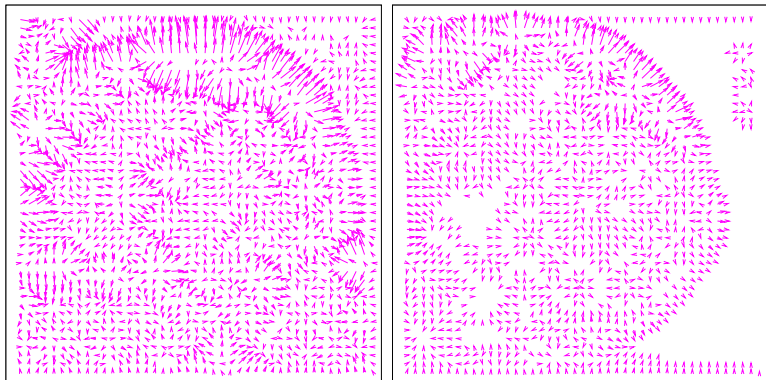


FIGURE: Résultat avec Horn & Schunk

Applications

Vitesse écoulement sanguin

VITESSE ÉCOULEMENT SANGUIN

- ▶ Contexte : mesure de l'écoulement d'un fluide à partir d'acquisition X.
- ▶ Sang : liquide de contraste.
- ▶ Les fluides vérifient le principe de la conservation de la masse (en 3D) :

$$\frac{d\rho}{dt} = \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (11)$$

ρ masse volumique, \mathbf{V} vitesse dans \mathbb{R}^3 .

- ▶ Imagerie X : acquisition projective d'une scène 3D :

$$E(x, y, t) = \int \rho(x, y, z, t) dz$$

- ▶ [Wildes and Amabile, 1997].

VITESSE ÉCOULEMENT SANGUIN (SUITE)

- ▶ Modèle 2D de transport (intégration en z de (11)) :

$$\int \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) dz + \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dz = 0$$

$$\nabla_{x,y} \cdot \int \rho \mathbf{V} dz + \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dz + [\rho \mathbf{V}] = 0$$

- ▶ $\nabla_{x,y}$ gradient 2D.
- ▶ Considérons le champ de vitesse 2D \mathbf{v} comme la densité pondérée par le moyennage du champs 3D :

$$\mathbf{v} = \frac{\int \rho \mathbf{V}_{x,y} dz}{\int \rho dz}$$

- ▶ On obtient alors l'équation 2D sur $E = \int \rho dz$ et \mathbf{v} en négligeant le terme de bord :

$$\nabla_{x,y} \cdot (E \mathbf{v}) + \frac{\partial E}{\partial t} = -[\rho \mathbf{V}] = 0$$

VITESSE ÉCOULEMENT SANGUIN (SUITE)

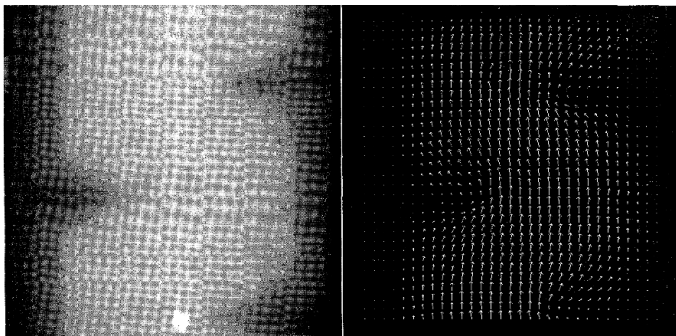


FIGURE: Écoulement d'un fluide en imagerie X (tiré de [Wildes and Amabile, 1997]).

Applications

Recalage

RECALAGE

- ▶ Rigoureusement, les méthodes d'estimation du mouvement peuvent servir de méthodes de recalage (et inversement!).
- ▶ Recalage rigide avec grands déplacements :
 - ▶ chercher la composante translationnelle (Fourier+invariance par rotation , *Bloc Matching*)
 - ▶ Approches similaires pour la rotation.
- ▶ Déformations non rigides : flot optique avec modèle *ad hoc*.
- ▶ Une contrainte nécessaire en recalage mais non nécessaire dans notre contexte :
nécessité d'une transformation image qui soit un difféomorphisme.
- ▶ Voir le cours sur le recalage.

Applications

Atlas en imagerie cérébrale : “Brain Warming”

IMAGERIE CÉRÉBRALE : “BRAIN WARPING”

- ▶ Mise en correspondance avec un atlas (c’est donc un problème de recalage).
- ▶ Fonctions de mise en correspondance :
 - ▶ rigide (pour le recalage de l’image)
 - ▶ non rigide, non linéaire : déformation élastique de tissu.
- ▶ Utiliser les principes de la mécanique des matériaux élastiques [Toga, 1999] :
 - ▶ équations de Navier-Stokes (à l’équilibre) : le champ de déplacement \mathbf{u} des tissus résulte d’une déformation initiale (force \mathbf{F}) :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x})) = 0$$

- ▶ μ, λ coefficient de Lamé (propriété élastique du tissu),
- ▶ \mathbf{F} est le gradient d’une fonctionnelle de coût (corrélation, information mutuelle).
- ▶ $\mu \nabla^2 + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot)$: opérateur linéaire élastique.
- ▶ Cette équation dérive de l’énergie :

$$\int \mu (\nabla \mathbf{u})^2 + (\lambda + \mu) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 - G(\mathbf{x} - \mathbf{u}) dx.$$

BRAIN WARPING

- ▶ Choix typique pour \mathbf{F} :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = -(T(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) - S(\mathbf{x}))$$

S : atlas, T : image.

- ▶ Autre contrainte tirée de la mécanique des fluides visqueux [Greenader et al., 1996].
- ▶ Par rapport à Navier-Stock, la contrainte porte sur $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$.
- ▶ On résout alors le système :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) + \mathbf{F}(\mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) - \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (13)$$

- ▶ équation (12) : description lagrangienne de la déformation,
- ▶ équation (13) : relation à la description eulérienne de la déformation.

BRAIN WARPING : RÉSULTATS

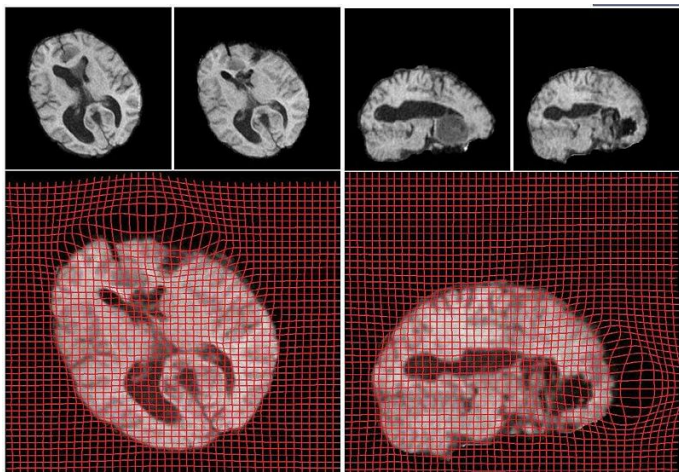


FIGURE: Résultat d'une mise en correspondance par déformation visqueuse (tiré de <http://www.na-mic.org>).

BRAIN WARPING : RÉSULTS (SUITE)

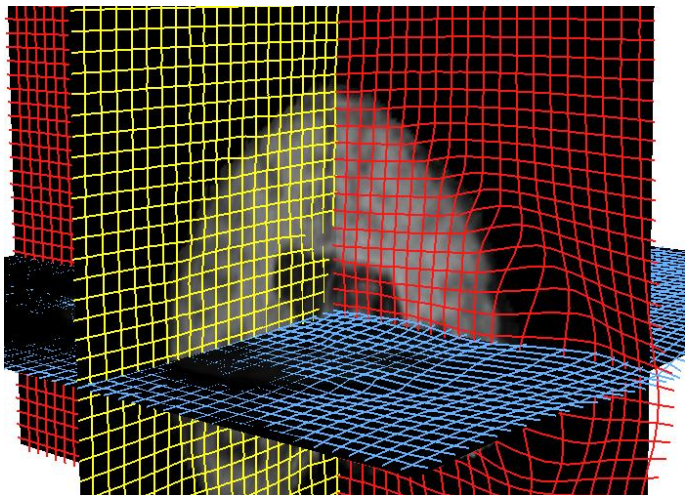


FIGURE: Version 3D (tiré de <http://www.na-mic.org>).

VISUALISATION : CHAMP DE VECTEURS

FIGURE: Fonction `quiver()` de Matlab/Octave.

LIGNES DE COURANT

- ▶ Calculer la trajectoire d'un point $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ transporté par un champ de vecteurs $w(\mathbf{x})$ statique (pas de temps).
- ▶ Résoudre :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}(s) &= w(\mathbf{x}(s)) \quad s \in [0, 1] \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (14)$$

- ▶ On intègre :

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + \int_0^s w(\mathbf{x}(u)) du$$

- ▶ Résolution par schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4 (utilise une linéarisation de $w(\mathbf{x}(u))$).

LIGNES DE COURANT

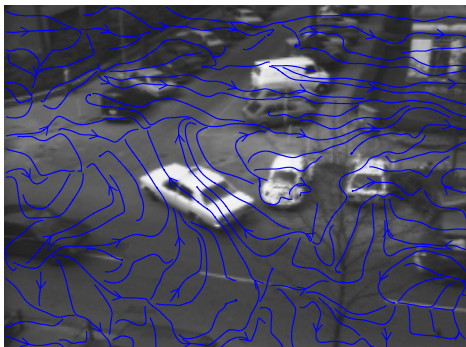


FIGURE: Fonction `stream2()` de Matlab.

LINE INTEGRAL CONVOLUTION (LIC)

- ▶ [Cabral and Leedom, 1993]
- ▶ Visualisation dense des lignes de courant.
- ▶ Calcul des lignes de courant (équation 14).
- ▶ Intégration des lignes de courant selon l'équation :

$$LIC(\mathbf{x}_0) = \int_{\mathbb{R}} k(u - u_0) T(\mathbf{x}(u)) du$$

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(u_0)$$

- ▶ T est une image de texture : l'image qui a généré le champ de vecteur ou bien un bruit uniforme.
- ▶ Le noyau k de convolution permet de fixer une fenêtre sur la ligne de courant :
 - ▶ $k(u) = \frac{1}{2L} \mathbb{1}_{[-L, +L]}$
 - ▶ un noyau gaussien de variance L

LIC : APPLICATIONS

- ▶ Lisser dans la direction du gradient (similaire à une diffusion orientée).
- ▶ Trajectoires générées par $w = \nabla T$.

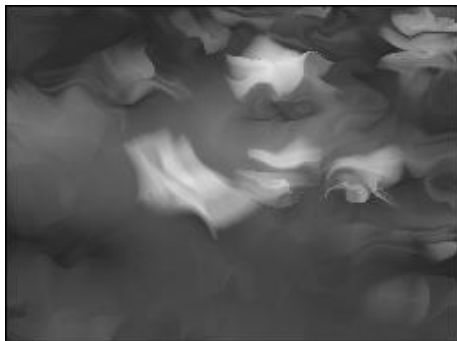


FIGURE: LIC sur gradient, transport de l'image.

LIC : APPLICATIONS

- ▶ Visualiser un champ de vecteurs w .
- ▶ On prend $T(x, y) \sim \mathcal{U}([0, 1])$.

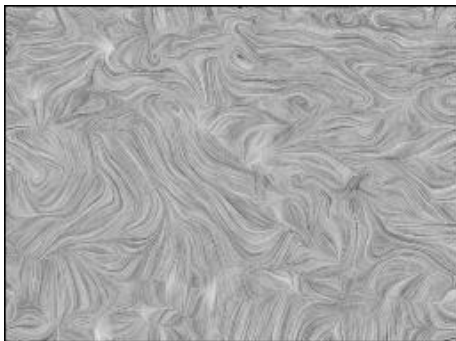


FIGURE: LIC : transport d'image de bruit.

TRAJECTOIRES TEMPORELLES

- ▶ Cette fois, le champ de vitesse dépend du temps.
- ▶ Correspond à la notion “habituelle” de trajectoire.
- ▶ Modification de l'équation (14) à résoudre :

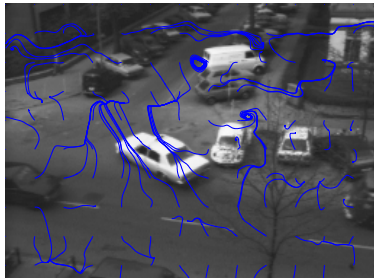
$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} &= w(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0\end{aligned}$$

- ▶ Il faut donc intégrer :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t w(\mathbf{x}(u), u) du$$

- ▶ Résolution par schéma de Runge-Kutta à l'ordre 4.

TRAJECTOIRES TEMPORELLES

FIGURE: Fonction `stream3()` de Matlab.

NORME DU CHAMP DE VECTEURS

$$\blacktriangleright \|w\|^2(\mathbf{x}) = u^2(\mathbf{x}) + v^2(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

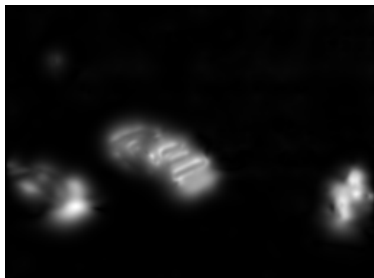


FIGURE: Image de norme (normalisé).

LIGNE DE NIVEAUX DE LA NORME DU CHAMP DE VECTEURS

► $C(a) = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid \|w\|^2(\mathbf{x}) = a\}$

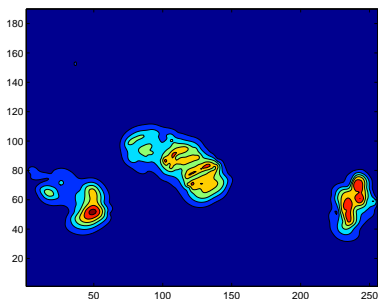


FIGURE: Fonction contourf() de Matlab/Octave.

LIGNE DE NIVEAUX : CAS D'UN CHAMP DÉRIVANT D'UN POTENTIEL

- ▶ Il est intéressant de visualiser les lignes de front : courbes orthogonales au champ de vecteurs.
- ▶ Le cas simple : $\nabla P = w$.
Le champ de vecteurs w dérive d'un potentiel P (c'est un champ de force).
- ▶ On intègre w en l'une des ses composantes :

$$P(x, y) = \int u(x, y) dx \quad \text{ou}$$

$$P(x, y) = \int v(x, y) dy$$

et on calcule les lignes de niveaux de P .

- ▶ On parle de lignes d'*isopotential*.

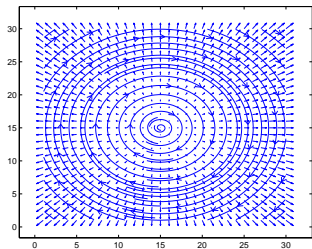
LIGNES DE FRONT

- ▶ Exemple du gradient spatial $w = \nabla I$: correspond aux lignes de niveau de l'image I .
- ▶ Problème : un champ de vecteurs vitesse ne dérive pas d'un potentiel.
- ▶ On peut calculer la trajectoire d'une particule transportée par le vecteur orthogonal au champ des vitesses :

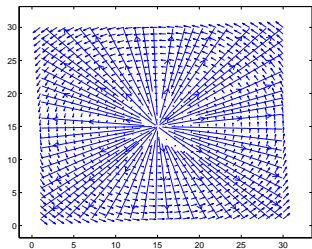
$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial s}(s) &= w^\perp(c(s)) \\ c(0) &= c_0\end{aligned}$$

avec $w^\perp = \frac{1}{\|w\|}(v, -u)^T$.

LIGNES DE FRONT



(a) Champ divergent



(b) Champ rotationnel

FIGURE: Exemples sur champs affines

VISUALISATION COULEUR DE *Middlebury*

- ▶ Représentation couleur :
 - ▶ Teinte : orientation du vecteur
 - ▶ Saturation : norme du vecteur.
- ▶ Permet une visualisation dense d'un champs de vecteurs et aussi une comparaison.
- ▶ Code source disponible à <http://vision.middlebury.edu/flow/>.

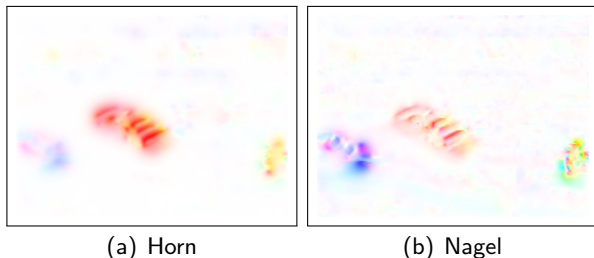


FIGURE: Taxis de Hambourg

SUPERPOSITION DE CHAMPS

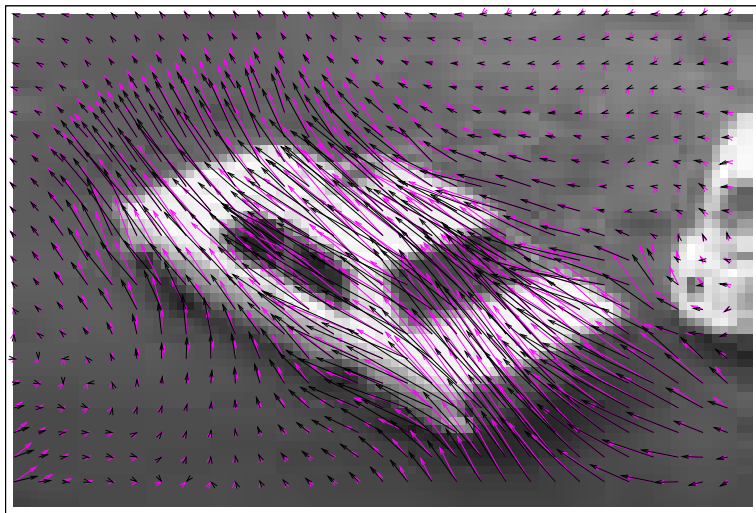


FIGURE: Superposition de deux champs avec xflow

MESURE DES ERREURS ANGULAIRES

- ▶ Comparaison des orientations.
- ▶ Soient deux champs w_1, w_2 , évaluer $\langle \widehat{w_1}, \widehat{w_2} \rangle = \arccos \left(\frac{1}{\|w_1\| \|w_2\|} w_1^T w_2 \right)$
- ▶ Comparaison dans l'espace-temps [Fleet and Jepson, 1990] :
 - ▶ $n = \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|}$. Composante $w_n = w^T n$
 - ▶ Donc $w^T n - w_n = (w^T \quad 1) \begin{pmatrix} n \\ -w_n \end{pmatrix} = 0$
 - ▶ $\begin{pmatrix} w \\ 1 \end{pmatrix}$ est le vecteur vitesse dans l'espace-temps.
 - ▶ Dans l'espace-temps, le vecteur vitesse est orthogonal au plan (gradient, $-w_n$).
 - ▶ Si on compare un champ de vecteur estimé w_e à un champ correct w , il doit idéalement être orthogonal au plan $(n^T, 1)$.
 - ▶ On calcule : $\arcsin \left(\frac{(w_e, 1)^T (n, -w)}{\sqrt{1 + \|w_e\|^2} \sqrt{1 + \|w\|^2}} \right)$
 - ▶ Ou encore : $\arccos \left(\frac{(w_e, 1)^T (w, 1)}{\sqrt{1 + \|w_e\|^2} \sqrt{1 + \|w\|^2}} \right)$

ANNEXES

MÉTHODE DE HORN & SCHUNK

RÉSOLUTION PAR MOINDRE CARRÉ POUR LUCAS KANADE

MOINDRE CARRÉ POUR MODÈLE AFFINE

FORMALISME EULÉRIEN/LAGRANGIEN

- ▶ Finalement deux formalismes cohabitent pour décrire l'évolution temporelle d'une image I .
- ▶ Le formalisme Lagrangien : on s'intéresse aux modifications des propriétés d'un point de l'image le long de sa trajectoire :

$$\frac{d}{dt} (I(\mathbf{x}(t), t))$$

le point est assimilé à une particule en mouvement.

- ▶ Le formalisme Eulérien : on s'intéresse aux modifications des propriétés d'un pixel de l'image (coordonnée absolue dans le domaine spatial).

$$\frac{d}{dt} (I(\mathbf{x}, t)) = \frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{x}, t)$$

- ▶ Passage de l'un à l'autre :

$$\frac{d}{dt} I(\mathbf{x}(t), t) = \nabla I(\mathbf{x}(t), t)^T \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}(t)}{\partial t}}_{\mathbf{v}} + \frac{\partial I(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t}$$

CALCUL DES VARIATIONS

- ▶ Définition de la dérivée directionnelle (dans des espaces de fonctions) :
 - ▶ $E : u \mapsto E(u)$, u une fonction, $E(u) \in \mathbb{R}^+$.
 - ▶ Dérivé en u dans la direction f (f est une fonction) :

$$DE(u)(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(u+hf) - E(u)}{h}$$
- ▶ Théorème : si l'espace fonctionnel possède un produit scalaire alors

$$DE(u)(f) = \langle \nabla E(u), f \rangle$$

- ▶ ∇E : ce qu'on cherche à calculer pour minimiser E .

HORN & SCHUNK : RÉOLUTION NUMÉRIQUE

- Pour exemple : calcul de la différentielle de

$$E_2(u, v) = \int_{\Omega} (\nabla u^2 + \nabla v^2) dx dy$$

$$\begin{aligned} G(f, h, u, v) &= E(u + hf, v) - E(u, v) \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u + h\nabla f)^2 - \nabla u^2 dx dy \\ &= \int_{\Omega} 2h\nabla u\nabla f + h^2\nabla f^2 dx dy \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(f, h, u, v)}{h} &= 2 \int_{\Omega} \nabla u\nabla f dx dy \end{aligned}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE (SUITE)

- ▶ Théorème de Green :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla f dx dy = - \int_{\Omega} (\nabla^2 u) f dx dy$$

- ▶ donc : $\langle DE_2(u), f \rangle = -2 \int_{\Omega} (\Delta u) f dx dy$

- ▶ Finalement : $DE_2(u, v) = -2\Delta u$

- ▶ En calculant la différentielle de E en u et en v , on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{v}} = 0 \iff \begin{cases} l_x (l_x u + l_y v + l_t) - \alpha \Delta u = 0 \\ l_x (l_x u + l_y v + l_t) - \alpha \Delta v = 0 \end{cases} \quad (15)$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE (SUITE)

- ▶ Étape suivante : discrétiser ce système pour se ramener à un système linéaire à résoudre.
- ▶ Discrétisation de l'espace : x connu sur $(x_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$, idem pour y connu sur $(y_i)_{i \in \{1, \dots, p\}}$
- ▶ Discrétisation des fonctions : $u(x_i, y_i) \sim u_{i,j}$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE (SUITE)

- Discrétisation des opérateurs différentiels :

$$\begin{cases} \Delta u = \bar{u} - u \\ \Delta v = \bar{v} - v \end{cases}$$

où \bar{f} est défini par :

$$\begin{aligned} \bar{f}_{i,j} = & \frac{1}{6} \{ f_{i-1,j} + f_{i,j+1} + f_{i+1,j} + f_{i,j-1} \} \\ & + \frac{1}{12} \{ f_{i-1,j-1} + f_{i-1,j+1} + f_{i+1,j+1} + f_{i+1,j-1} \} \end{aligned}$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE (SUITE)

- ▶ Le système (15) devient :

$$\begin{cases} (\alpha + l_x^2)u + l_x l_y v = \alpha \bar{u} - l_x l_t \\ l_x l_y u + (\alpha + l_y^2)v = \alpha \bar{v} - l_y l_t \end{cases}$$

- ▶ On diagonalise à gauche :

$$\begin{cases} (\alpha + l_x^2 + l_y^2)u = (\alpha + l_x^2)\bar{u} - l_x l_y \bar{v} - l_x l_t \\ (\alpha + l_x^2 + l_y^2)v = -l_x l_y \bar{u} + (\alpha + l_y^2)\bar{v} - l_y l_t \end{cases}$$

RÉSOLUTION

- ▶ Problème : des termes qui dépendent de u et v à droite et à gauche : pas d'inversion directe du système.
- ▶ On réécrit le système sous cette forme :

$$\begin{cases} (\alpha + l_x^2 + l_y^2)(u - \bar{u}) = -l_x(l_x\bar{u} + l_y\bar{v} - l_t) \\ (\alpha + l_x^2 + l_y^2)(v - \bar{v}) = -l_y(l_x\bar{u} + l_y\bar{v} - l_t) \end{cases} \quad (16)$$

- ▶ Formellement : $\bar{u} = Au$ avec $A = (\dots)$
- ▶ Donc le schéma s'écrit : $a(I - A)\mathbf{v} = B\mathbf{A}\mathbf{v} + C$
- ▶ Pour résoudre : il faut inverser A : matrice de très grande taille !

MÉTHODE DU POINT FIXE

- ▶ Soit la suite : $a(\mathbf{v}^{k+1} - \bar{\mathbf{v}}^k) = B\bar{\mathbf{v}}^k + C$
- ▶ Théorème du point fixe : si la suite converge, elle admet comme limite le point fixe de l'équation $a(\mathbf{v} - A\mathbf{v}) = BA\mathbf{v} + C$
- ▶ Dernier résultat : soit le schéma itératif

$$X^{n+1} = AX^n + B,$$

alors la suite converge vers le point fixe de $X = AX + B$ si la matrice A est à diagonale strictement dominante.

RÉSOLUTION

- ▶ Application au schéma de Horn & Schunk :
 - ▶ on ajoute un paramètre fictif à (u, v) : (u^k, u^k) .
 - ▶ On obtient le schéma itératif suivant :

$$\begin{cases} u^{k+1} = \bar{u}^k + \frac{-l_x(l_x \bar{u}^k + l_y \bar{v}^k + l_t)}{\alpha + l_x^2 + l_y^2} \\ v^{k+1} = \bar{v}^k + \frac{-l_y(l_x \bar{u}^k + l_y \bar{v}^k + l_t)}{\alpha + l_x^2 + l_y^2} \end{cases} \quad (17)$$

- ▶ La condition précédente dépend de A (approximation du laplacien) et mais aussi des gradients de l'image : en pratique cela fonctionne.

LUCAS KANADE : MOINDRE CARRÉ

- ▶ Résultat : la valeur de \mathbf{v}_x qui minimise l'énergie (7) est donnée directement par la formule des moindres carrés :

$$\mathbf{v}_x = - \left(\nabla I_2 \nabla I_2^T \right)^{-1} \nabla I_2 I_{21}$$

- ▶ Preuve : posons $A = \nabla I_2^T$, $B = I_{21}$, $X = (u, v)^t$.
 - ▶ Pour minimiser $\sum_{y \in W} (AX + B)^2$, il faut résoudre $AX = -B$, (mais A n'est pas carré, donc non inversible).

LUCAS KANADE : MOINDRE CARRÉ

- ▶ Résultat : la valeur de \mathbf{v}_x qui minimise l'énergie (7) est donnée directement par la formule des moindres carrés :

$$\mathbf{v}_x = - \left(\nabla I_2 \nabla I_2^T \right)^{-1} \nabla I_2 I_{21}$$

- ▶ Preuve : posons $A = \nabla I_2^T$, $B = I_{21}$, $X = (u, v)^t$.
 - ▶ Pour minimiser $\sum_{y \in W} (AX + B)^2$, il faut résoudre $AX = -B$, (mais A n'est pas carré, donc non inversible).
 - ▶ Il est équivalent d'écrire $A^T AX = -A^T B$. Mais $A^t A$ est maintenant une matrice carré et donc peut être inversible (si non singulière).

LUCAS KANADE : MOINDRE CARRÉ

- ▶ Résultat : la valeur de \mathbf{v}_x qui minimise l'énergie (7) est donnée directement par la formule des moindres carrés :

$$\mathbf{v}_x = - \left(\nabla I_2 \nabla I_2^T \right)^{-1} \nabla I_2 I_{21}$$

- ▶ Preuve : posons $A = \nabla I_2^T$, $B = I_{21}$, $X = (u, v)^t$.
 - ▶ Pour minimiser $\sum_{y \in W} (AX + B)^2$, il faut résoudre $AX = -B$, (mais A n'est pas carré, donc non inversible).
 - ▶ Il est équivalent d'écrire $A^T AX = -A^T B$. Mais $A^t A$ est maintenant une matrice carré et donc peut être inversible (si non singulière).
 - ▶ Et donc $X = -(A^T A)^{-1} A^T B$ à condition que $A^T A$ soit inversible.

LUCAS KANADE : MOINDRE CARRÉ

- ▶ Résultat : la valeur de \mathbf{v}_x qui minimise l'énergie (7) est donnée directement par la formule des moindres carrés :

$$\mathbf{v}_x = - \left(\nabla I_2 \nabla I_2^T \right)^{-1} \nabla I_2 I_{21}$$

- ▶ Preuve : posons $A = \nabla I_2^T$, $B = I_{21}$, $X = (u, v)^t$.
 - ▶ Pour minimiser $\sum_{y \in W} (AX + B)^2$, il faut résoudre $AX = -B$, (mais A n'est pas carré, donc non inversible).
 - ▶ Il est équivalent d'écrire $A^T AX = -A^T B$. Mais $A^t A$ est maintenant une matrice carré et donc peut être inversible (si non singulière).
 - ▶ Et donc $X = -(A^T A)^{-1} A^T B$ à condition que $A^T A$ soit inversible.
 - ▶ $A^T A$ est symétrique : on peut utiliser une décomposition LU.
 - ▶ Remarque : si $A^T A$ n'est pas inversible, on peut faire une décomposition en valeurs singulières de cette matrice (pseudo-inverse : voir Numerical Recipes).

MODÈLE PARAMÉTRIQUE AFFINE (OBOBEZ *et al*)

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE PAR MOINDRE CARRÉ

- ▶ Minimiser en $\Theta = (A, \xi)$:

$$\mathcal{E}(\Theta) = \sum_{i=1}^n (\nabla I^T(x_i, y_i)B(x_i, y_i)A + I_t(x_i, y_i) + \xi)^2$$

- ▶ Posons :

$$\begin{cases} \mathcal{X}_i = (\nabla I(x_i, y_i)B(x_i, y_i), 1) \\ \mathcal{Y}_i = -I_t(x_i, y_i) \end{cases}$$






- ▶ Alors :

$$\mathcal{E}(\Theta) = \sum_{i=1}^n (\mathcal{X}_i\Theta - \mathcal{Y}_i)^2$$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE

- ▶ La solution du problème $\min_{\Theta} \mathcal{E}(\Theta)$ (minimisation aux moindres carrés) est bien connue et est donnée directement par la méthode des moindres carrés :

$$\hat{\Theta} = \left(\sum_i \mathcal{x}_i^T \mathcal{x}_i \right)^{-1} \sum_i \mathcal{x}_i^T \mathcal{y}_i$$

-  Barron, J., Fleet, D., and Beauchemin, S. (1994).
Performance of optical flow techniques.
Internation Journal of Computer Vision, 12(1) :43–77.
-  Beauchemin, S. and Barron, J. (1995).
The computation of optical flow.
ACM Computing Surveys, 27(3) :433–467.
-  Bernard, C. (1999).
Ondelettes et problèmes mal posés : la mesure du flot optique et l'interpolation irrégulière.
PhD thesis, École Polytechnique.
-  Brox, T., Bruhn, A., Papenbergh, N., and Weickert, J. (2004).
High accuracy optical flow estimation based on a theory for warping.
In Springer-Verlag, editor, *Proc. of 8th ECCV*, volume 4, pages 25–36,
Prague, Czech Republic.
-  Cabral, B. and Leedom, C. (1993).
Imaging vector fields using line integral convolution.

In *SIGGRAPH*, pages 263–270.



Cohen, I. (1993).

Nonlinear variational method for optical flow computation.

In *8th Scandinavian Conference on Image Analysis, Tromso, Norway, June 1993. IAPR*, pages 523–530.



Fleet, D. and Jepson, A. (1990).

Computation of component image velocity from local phase information.

International Journal of Computer Vision, 5(1) :77–104.



Greenader, G., Rabitt, R., and Miller, M. (1996).

Deformable templates using large deformations kinematics.

IEEE Trans. on Image Processing, 5 :1435–1447.



Horn, B. and Schunck, B. (1981).

Determining optical flow.

In *Artificial Intelligence*, volume 17, pages 144–156.



Lucas, B. and Kanade, T. (1981).

A iterative image registration technique with an application to stereo vision.

In *Proc. of 7th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, pages 674–679, Vancouver, Canada.



Mitiche, A. and Bouthemy, P. (1996).

Computation and analysis of image motion : A synopsis of current problems and methods.

Internation Journal of Computer Vision, 19(1).



Mémin, E., Perez, P., and Machecourt, D. (1996).

Dense estimation and object-oriented segmentation of optical flow with robust techniques.

Technical Report 991, IRISA.



Nagel, H. (1987).

On the estimation of optical flow : relations between different approaches and some new results.

Articial Intelligence, 33(3) :298–324.



Nagel, H. (1989).

On a constraint equation for the estimation of displacement rates in image sequences.

IIIE Transactions of PAMI, 11 :13–30.



Odobez, J.-M. and Bouthemy, P. (1995).

Robust multiresolution estimation of parametric motion models.

Int. Jour. Vis. Com. and Im. Repr., 6(4) :348–365.



Prince, J. and McVeigh, E. (1992).

Motion estimation from tagged MR image sequences.

IEEE Trans. on Medical Imaging, 11(2).



Proesmans, M., Van Gool, L., and Oosterlinck, A. (1994).

Determination of optical flow and its discontinuities using non-linear diffusion.

LNCS, 801.



Rudin, L., Osher, S., and Fatemi, E. (1992).

Nonlinear total variation based noise removal algorithm.

Physica D, 60 :259–268.



Schunck, B. (1986).

Image flow continuity equations for motion and density.

In *Proceeding IEEE Workshop on Visual Motion*, pages 89–94, Charleston.



Suter, D. (1994).

Vector splines in computer vision.

In *Australian workshop on Thinplates*, Sydney, Australia.



Toga, A. (1999).

Brain Warping.

Academic Press.



Wildes, R. and Amabile, M. (1997).

Physically based fluid flow recovery from image sequences.

In *Computer Vision Pattern Recognition*, pages 969–975, Puerto Rico.