AMO correction de l'examen de Janvier 2013

D.Béréziat

17 janvier 2014

Exercice 3

1. Causalité :
   — pas d'apparition de nouvelles structures pour les échelles croissantes
   — pour des raisons de stabilités : le moindre bruit sera amplifié aux grandes échelles
   — Les espaces d'échelles linéaires sont équivalents à appliquer un filtrage gaussien avec la variance qui est l'échelle. Le filtre gaussien lisse les images et donc respecte le principe de causalité
2. Sélection des échelles :
   — Un blob est représenté comme un maxima local de l'image. Or, ce maxima décroît avec l'échelle (par principe de causalité), si par échelle optimal on entend échelle pour laquelle on a une réponse maximale, alors c'est l'échelle la plus fine, donc l'image originale mais c'est l'image qui représente toutes les échelles et donc le blob n'y est pas spatialement détectable
   — On peut utiliser la dérivé normalisé vue en cours. En multipliant chaque opérateur de dérivé par la racine carré de l'échelle, alors le maximal local d'un blob passe par un maximal dans l'espace des échelles (et ce maxima est fonction de l'échelle) car il ne permet pas d'éliminer les structures d'une certaines tailles.
   — t est un temps algorithmique dans l'équation de diffusion non-linéaire mais ce n'est pas un paramètre d'échelle.
3. Le filtre médian est un opérateur admissible pour former un espace d'échelle car il respecte les principes de causalité, d'unimodalité et de positivité. Il n'est pas linéaire car il ne peut pas être exprimé sous d'une convolution

Exercice 4

1.

$$\begin{aligned}
L(i,O) &= f(i) \\
L(i,1) &= \alpha f(i-1) + (1-2\alpha)f(i) + \alpha f(i+1) \\
L(i,2) &= \alpha L(i-1,1) + (1-2\alpha)L(i,1) + \alpha L(i+1,1) \\
&= \alpha(\alpha f(i-2) + (1-2\alpha)f(i-1) + \alpha f(i)) \\
&\quad +(1-2\alpha)(\alpha f(i-1) + (1-2\alpha)f(i) + \alpha f(i+1)) \\
&\quad +\alpha(\alpha f(i) + (1-2\alpha)f(i+1) + \alpha f(i+2))
\end{aligned}$$

on a cinq termes en f, (qui faut regrouper)

2. Le noyau $(a \quad 1-2a \quad a)$ forme un noyau d'espace d'échelles admissible, comme vu en cours, il est unimodale et positif. La convolution de noyau d'espace d'échelles admissible est un noyau qui lui aussi est admissible. On le constate sur l'exemple précédent.

Exercice 5

1. le gradient de I est un vecteur de R^2, donc L l'est aussi.
2. La composante L^1 vérifie une équation de diffusion avec la dérivé en x de I comme condition initiale. L^2 vérifie aussi une équation de diffusion avec la dérivée en y de I comme condition initiale :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^1}{\partial t}(x,y,t) &= \frac{1}{2}\nabla^2 L^1(x,y,t) \\
\frac{\partial L^2}{\partial t}(x,y,t) &= \frac{1}{2}\nabla^2 L^2(x,y,t) \\
L^1(x,y,0) &= \frac{\partial I}{\partial x}(x,y) \\
L^2(x,y,0) &= \frac{\partial I}{\partial y}(x,y)
\end{aligned}$$

Exercice 6

1. c'est un schéma implicite puisque pour calculer $\mathrm{u}_j{}^{\mathrm{n+1}}$, il faut non seulement connaître u^n mais aussi u^{n+1} (sauf en j). Notons $\alpha = c\frac{\triangle t}{2\triangle x}$. Le schéma se ré-écrit :

$$AU^{n+1} = BU^n$$

   où A est une matrice à trois diagonales : la première diagonale a tous ses éléments valant $1+2\alpha$, la seconde diagonale supérieure et la seconde diagonale inférieure ont tous leurs éléments valant $-\alpha$. La matrice B est aussi à trois diagonales : la première a ses éléments à $1-2\alpha$ et les deux autres ont leurs éléments à α.
2. non corrigé.
3. On s'intéresse aux solutions de la forme $u_j^n = \xi^n e^{ikj\triangle x}$ (on rappelle que k est une fréquence). On remplace les termes u dans l'équation (6). On a :

$$\begin{aligned}
\xi^{n+1}e^{ikj\triangle x} &= \xi^n e^{ikj\triangle x} + \alpha\Big(\xi^{n+1}e^{ik(j+1)\triangle x} - 2\xi^{n+1}e^{ikj\triangle x} + \xi^{n+1}e^{ik(j-1)\triangle x} \\
&\quad + \xi^n e^{ik(j+1)\triangle x} - 2\xi^n e^{ikj\triangle x} + \xi^n e^{ik(j-1)\triangle x}\Big)
\end{aligned}$$

On simplifie par $\xi^n e^{ikj\triangle x}$:

$$\xi = 1 + \alpha\left(\xi e^{ik\triangle x} - 2\xi + \xi e^{-ik\triangle x} + e^{ik\triangle x} - 2 + e^{-ik\triangle x}\right)$$

On a $2\cos\theta = e^i + e^{-i}$, donc :

$$\begin{aligned}
\xi &= 1 + 2\alpha((\xi + 1)(\cos k\triangle x - 1)) \\
&= 1 - 4\alpha((\xi + 1)\sin^2 \frac{k\triangle x}{2} \\
\xi(1 + 4\alpha \sin^2 \frac{k\triangle x}{2}) &= 1 - 4\sin^2 \frac{k\triangle x}{2} \\
\xi &= \frac{1 - 4\alpha \sin^2 \frac{k\triangle x}{2}}{1 + 4\alpha \sin^2 \frac{k\triangle x}{2}}
\end{aligned}$$

et donc $\xi < 1$: le schéma de Crank-Nicholson est inconditionnellement stable.