

TADI : examen réparti n°2
Première session

12 février 2016

Durée de l'examen : 1h. Portables éteints et rangés.

Documents autorisés : une page manuscrite recto-verso de notes de cours sur les ondelettes et sur les espaces d'échelles.

Les ?? parties sont indépendantes et à rendre sur des copies séparées.

Le barème, sur 40, n'est donné qu'à titre indicatif, et est susceptible d'être modifié.

Partie 3 : Analyses multi-résolution et Ondelettes

Exercice 1 Résolution temporelle et fréquentielle (7 points)

On considère la fonction $x(t)$ suivante, avec $f_0 = \frac{1}{T_0}$:

$$x(t) = [\cos(2\pi f_0 t) + \cos(4\pi f_0 t)] \cdot \text{Rect}\left(\frac{t - T_0}{2T_0}\right) + [\cos(6\pi f_0 t) + \cos(8\pi f_0 t)] \cdot \text{Rect}\left(\frac{t - 3T_0}{2T_0}\right) \quad (1)$$

On rappelle que $\text{Rect}(t)$ est la fonction porte : $\text{Rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Sa transformée de Fourier est : $TF[\text{Rect}(\frac{t}{T})] = T \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T} = T \text{sinc}(\pi f T)$. On supposera ici que la fonction sinus cardinal est nulle en dehors de son lobe principal.

1. Calculer la transformée de Fourier $X(f) = TF[x(t)]$ et la représenter graphiquement.
 - Avec cette représentation $X(f)$, les composantes du signal peuvent-elle être correctement séparés en temps et en fréquence ? Justifier.
2. Calculer la transformée de Fourier fenêtrée $X(f, b)$, avec 2 fenêtrés disjointes de taille $2T_0$, la première centrée en T_0 , *i.e.* $\text{Rect}\left(\frac{t-T_0}{2T_0}\right)$, la seconde en $3T_0$, *i.e.* $\text{Rect}\left(\frac{t-3T_0}{2T_0}\right)$.
 - Tracer le spectrogramme $|X(f, b)|$. Les composantes du signal peuvent-elle être correctement séparés en temps et en fréquence ? Justifier.
3. Calculer la transformée de Fourier fenêtrée $X(f, b)$, avec 4 fenêtrés disjointes de taille T_0 , centrées respectivement en $\frac{T_0}{2}$, $\frac{3T_0}{2}$, $\frac{5T_0}{2}$, $\frac{7T_0}{2}$.
 - Tracer le spectrogramme $|X(f, b)|$. Les composantes du signal peuvent-elle être correctement séparés en temps et en fréquence ? Justifier.
4. Quelle est la limite intrinsèque de la transformée de Fourier fenêtrée ici illustrée ? Quelle solution apporte la transformée en ondelettes ?

Exercice 2 Compressive Sensing (3 points)

On considère une image x qu'on décompose dans une base orthonormée (*e.g.* transformée en cosinus discret), sous la forme $x = \Psi s$. Dans l'échantillonnage comprimé, les mesures y sont effectuées par un processus linéaire aléatoire, *e.g.* matrice Φ de distribution uniforme dans $\{0; 1\}$.

1. Écrire le résultat de la mesure en fonction de Φ , s et Ψ .
— Écrire une fonction (`matlab`) `y= mesure(s, psi)` qui effectue cette mesure.
2. Comment peut-on reconstruire le signal de départ à partir des mesures dans les méthodes de compressive sensing ? Peut-on avoir une reconstruction exacte ? Pourquoi ?

Partie 4 : Espaces d'échelles

Exercice 3 Espace d'échelles linéaire (4 points)

1. Soit une image définie sur un domaine bornée de \mathbb{R}^2 . Donner deux définitions équivalentes d'une représentation linéaire et continue en échelles de cette image. Définir le terme *échelle*.
2. Quel lien existe-t-il entre une échelle et les structures visibles dans une image ?
3. Donner une méthode vue en cours pour déterminer une échelle optimale pour la détection d'objets.

Exercice 4 Espace d'échelles non linéaire (4 points)

1. On considère la méthode de Perona-Malik vue en cours. Rappeler l'équation aux dérivées partielles qui la caractérise et expliquer comment on peut obtenir une représentation en échelles à partir d'une image. Pourquoi parle-t-on d'espace d'échelles non linéaire ?
2. Quelles sont la ou les propriétés communes que partagent les représentations linéaire et non linéaire. De même, citez les différences.

Exercice 5 Applications (2 points)

Considérons les quatre problèmes suivants du traitement d'images : 1) détection de contours, 2) segmentation, 3) analyse structurale de l'image, 4) lissage orienté. Pour chacune d'entre elle, en justifiant bien vos réponses, choisir une méthode basée sur une représentation en espace d'échelles soit linéaire, soit non-linéaire. Décrivez de manière exhaustive les quatre méthodes, et si besoin, le paramétrage.